PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 3 — 1. Februar 1938. Redaktionsschluß für Nr. 5 am 15. Februar 1938 — 39. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

E. Justi und H. Scheffers, Über die Widerstandsänderung von Aluminiumeinkristallen in starken magnetischen Feldern bei tiefen Temperaturen. S. 105.

J. J. Sommer, Theoretische und experimentelle Beiträge zur Frage der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung. I. S. 110.

Fr. Fischer, B. Gudden und M. Treu, Über den Bleiglanzlichtdetektor. S. 127.

Besprechungen:

Agte-Becker, Hartmetallwerkzeuge. S. 134.

Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie. S. 135.

1. Systemnummer 22: Kalium. Lieferung 2: Verbindungen mit Stickstoff, Fluor und Chlor.

2. Systemnummer 35: Aluminium. Teil A: Das Element. Lieferung 5: Legierungen mit Zink bis Uran.

3. Magnesiumlegierungen, Patentsammlung, von A. Grützner, G. Apel und C. Götze, zugleich Anhang zu Systemnummer 27: Magnesium. Teil A: Das Element.

J. P. den Hartog, Mechanische Schwingungen. S. 135.

Jahrbuch 1935 der Vereinigung für Luftfahrtforschung.

Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung. S. 136.

G. Schmaltz, Technische Oberflächenkunde, Feingestalt und Eigenschaften von Grenzflächen technischer Körper insbesondere der Maschinenteile. S. 136.

Nachrichten. S. 136.

ABHANDLUNGEN

Über die Widerstandsänderung von Aluminiumeinkristallen in starken magnetischen Feldern bei tiefen Temperaturen

Von E. Justi und H. Scheffers

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

1. Aufgabe der Untersuchung.

Unsere bisherigen Untersuchungen über die Widerstandszunahme kubischer Metallkristalle in magnetischen Quer- und Längsfeldern bei tiefen Temperaturen haben erwiesen, daß die Widerstandsvermehrung trotz des hochsymmetrischen Kristallbaues stets anisotrop ist, je nach raum- oder flächenzentrierter Anordnung der Metallatome um viele Größenordnungen verschieden sein und in besonderen Fällen auch ganz verschwinden kann. Nachdem wir bisher nur über die nichtsupraleitenden Metalle *Au* und *W* sowie *Ag*, *Cu* und *Mo* berichtet haben, teilen wir hier neue Messungen an dem kubisch-flächenzentrierten Supraleiter Aluminium (Sprungtemperatur 1,1° abs.) mit; orientierende Messungen an dem Supraleiter Blei dienen dabei zur Prüfung der Frage, ob die bei Aluminium beobachteten merkwürdigen Erscheinungen für alle Supraleiter charakteristisch sind.

2. Herstellung der Einkristalle

Entsprechend unserer Erfahrung, daß die einem Metall charakteristischen Leitfähigkeitserscheinungen nur dann hervortreten, wenn man die Störungen des Kristallgitters infolge der Wärmeschwingungen und der Fremdatome möglichst weitgehend beseitigt, waren wir darauf bedacht, für unsere Messungen bei tiefsten Temperaturen die chemisch reinsten Proben zu erhalten. Besonders in der Reinigung des *Al* sind kürzlich bedeutende Fortschritte erzielt worden, beträgt doch das Widerstandsverhältnis $R_{20°}/R_{273°}$ des reinsten *Al* (der Société Aluminium Paris) nach unseren Messungen (Zahlentafel 1) nur noch $1{,}8_4 \cdot 10^{-3}$, so daß der Idealwiderstand von $R_{20°}/R_{273°} = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ (2) den Restwiderstand von $0{,}8 \cdot 10^{-3} \pm 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ trotz der hohen charakteristischen Temperatur des *Al* ($\sim 395°$) bereits übertrifft, während noch de Haas und van Alphen (3) eine *Al*-Probe mit $R_{20°}/R_{273°} = 6{,}75 \cdot 10^{-2}$ verwendeten, die demnach einen um beinahe zwei Größenordnungen höheren Restwiderstand aufwies. Herr Prof. Dr. U. Dehlinger (Stuttgart) besaß die dankenswerte Freundlichkeit, uns aus diesem reinsten *Al* drei Einkristallstäbchen herzustellen, wie er sie anläßlich seiner eigenen Untersuchungen über die Festigkeit (4) und das Röntgenstrahlenextinktionsvermögen (5) benutzt hatte. Die nachfolgend als *Al* 2 und *Al* 3 bezeichneten Stäbe von 2 mm Durchmesser wurden — ohne Einsetzen eines orientierten Keimes — im Vakuumhochfrequenzofen durch langsames Erstarren (Gußkristalle, Bridgman-Verfahren) gewonnen, während *Al* 4 durch kritisches Recken und anschließendes Tempern einer solchen Probe zu einem Konglomerat verschieden großer Kristallite, bis zu 1 cm Länge bei 4 mm Durch-

Zahlentafel I

Widerstandsverhältnisse der Aluminiumproben bei 20° und 14° abs. ohne äußeres Magnetfeld

	Al 2	*Al* 3	*Al* 4	*Al* de Haas
$R_{20°}/R_{273°}$	$1{,}8_4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$6{,}75 \cdot 10^{-2}$
$R_{14°}/R_{273°}$	$1{,}4_1 \cdot 10^{-3}$	$0{,}93 \cdot 10^{-2}$	—	$6{,}65 \cdot 10^{-2}$

messer, umgewandelt wurde (Rekristallisationskristalle, Elam-Carpenter-Verfahren). Widerstandsmessungen an diesen verschiedenen Kristallformen erscheinen deshalb sinnvoll, weil nach Dehlinger *Al* 4 Mosaikstruktur besitzt und keinen thermodynamischen Gleichgewichtszustand darstellt. Auf eine genauere Bestimmung der Kristallachsen konnte wegen der sehr geringen Anisotropie (vgl. 3.) verzichtet werden.

3. Meßergebnisse

a) Beobachtungen am reinsten Gußkristall (*Al* 2)

Die Widerstandsmessungen wurden bei den Temperaturen des schmelzenden Eises (273, 16° abs.), des siedenden (78° abs.) und erstarrenden technisch reinen Stickstoffes (64° abs.), des siedenden (20,4° abs.) und erstarrenden (14,0°) Wasserstoffes und des flüssigen Heliums bei normalem Druck (4,33°) ausgeführt; die starken Magnetfelder erzeugten wir mit dem großen Boas-Magneten (1) und maßen sie mit dem technischen Flußmesser von Hartmann & Braun. Die Widerstandsmessung geschah mit dem Diesselhorstschen fünfdekadigen Kompensator bei Belastungsströmen bis zu 6 A.

Schon die ersten orientierenden Widerstandsmessungen am reinsten Aluminiumkristall (*Al* 2) bei 20° abs. und Feldstärken bis zu $H = 18{,}7$ kG hatten ein überraschendes Ergebnis. Danach tritt selbst durch die stärksten magnetischen Transversalfelder eine nur geringe Widerstandserhöhung auf, die zudem von dem Winkel zwischen Magnetfeld und Kristallachsen nur sehr wenig (± 5 Proz.), wenn auch reproduzierbar, abhängt. Da der absolute Widerstand des Stäbchens außerordentlich gering ($R_{20°} = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ Ohm) und daher wegen der mit dem Spannungsabfall vergleichbar großen störenden Thermokräfte schwer meßbar ist, konnten keine gut reproduzierbaren Polardiagramme der Anisotropie gewonnen werden. Aus diesem Grunde erübrigte sich sowohl eine genaue kristallographische Orientierungsbestimmung wie die Anfertigung von Einkristallen vorgegebener ausgezeichneter Kristallrichtungen.

Wie die Abb. 1. im einzelnen zeigt, steigt der Widerstand bei 20° abs. (oberste Kurve) schon von der niedrigsten gemessenen Feldstärke (4 kG) ab nur verzögert an, so daß der feldfreie Widerstand $\varrho_{20°} = 4{,}6 \cdot 10^{-9}$ [Ohm · cm] durch das stärkste Feld (35 kG) nur auf etwa das Dreifache vermehrt wird. Auch die Kurven für 14° und 4,3° abs. zeigen diesen vom Verhalten anderer Metalle abweichenden Charakter. Eine weitere Überraschung bildet die Tatsache, daß dieser Betrag mit sinkender Temperatur nicht, wie bisher stets festgestellt, zunimmt, sondern

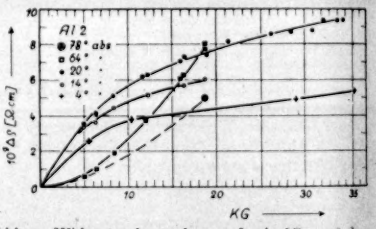

Abb. 1. Widerstandszunahme $10^9 \cdot \Delta\varrho$ [Ω · cm] des reinsten Gußkristalls *Al* 2 in Abhängigkeit von der Stärke des magnetischen Querfeldes bei verschiedenen konstanten Temperaturen.

sogar abnimmt, beträgt doch die Widerstandszunahme bei 4,3° abs. nur noch wenig mehr als die Hälfte derjenigen bei 20°; bei dieser Temperatur scheint die Widerstandsvermehrung vielleicht sogar einer Sättigung zuzustreben. Danach war es wahrscheinlich, daß die Widerstandszunahme bei höheren Temperaturen als 20° und konstanter Feldstärke einen noch größeren Betrag besitzt, um bei noch höheren Temperaturen ($T \geq 78°$ abs.), wo Messungen von Kapitza (6) vorliegen, wieder kleiner zu werden; aus diesem Grunde wurden auch Messungen bei 64° und 78° in technisch reinem erstarrendem bzw. normal siedendem Stickstoff ausgeführt, die im Gegensatz zu den Kurven bei $T < 20°$ abs. eine mit der Feldstärke beschleunigt zunehmende Widerstandsvermehrung erkennen lassen. Trägt man also die Meßpunkte der Abb. 1 als Funktion der Temperatur bei konstanter Feldstärke anstatt als Funktion der Feldstärke bei konstanter Temperatur auf (Abb. 2, $H = 18{,}7$ kG), so erhält man daher eine Kurve mit einem Maximum bei etwa 40° abs. Damit ergibt sich die merkwürdige Tatsache,

daß die Widerstandszunahme $\Delta\varrho$ bei Annäherung an $T = 0°$ durchaus nicht anwächst oder gar gegen ∞ strebt, wie man es bisher für alle bisher untersuchten Metalle gefunden hatte, sondern sogar abnimmt und eher gegen 0 strebt.

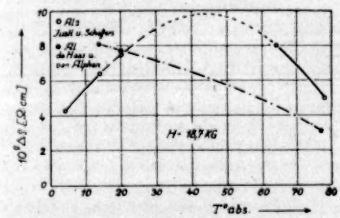

Abb. 2. Widerstandszunahme $10^9 \cdot \Delta\varrho$ [$\Omega \cdot$ cm] verschiedener Aluminiumproben in Abhängigkeit von der Temperatur im konstanten magnetischen Querfeld von 18,7 kG.

Im Längsfeld von 15,1 kG erfährt das *Al* 2 bei 20° abs. eine Widerstandserhöhung, die 30 Proz. des entsprechenden Quereffektes beträgt; de Haas und van Alphen (3) fanden an ihrer polykristallinen *Al*-Probe geringerer Reinheit ein Verhältnis des Längs- zum Quereffekts wie 1 : 2.

b) Einfluß der Verformung (bei *Al* 3)

Nach den Meßergebnissen am reinsten Gußkristall *Al* 2 betrachten wir jetzt diejenigen an *Al* 3, der aus demselben Material nach demselben Verfahren gewonnen wurde, aber bei dem Auslösen aus dem Graphittiegel eine geringe Verformung erlitt (die Schubfestigkeit solcher reinster Gußkristalle ist nach Dehlinger = 0), wodurch $R_{20°}/R_{273}$ auf $1{,}1 \cdot 10^{-2}$ anstieg, also auf das Zehnfache des Idealwiderstandes $1{,}0 \cdot 10^{-3}$

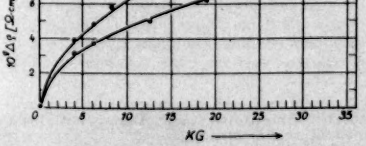

Abb. 3. Widerstandszunahme $10^9 \cdot \Delta\varrho$ [$\Omega \cdot$ cm] des reinen verformten Gußkristalles *Al* 3 in Abhängigkeit von der Stärke des magnetischen Querfeldes bei verschiedenen konstanten Temperaturen.

[Meißner (2)]. Die Abb. 3 gibt unsere Messungen der Widerstandszunahme des verformten Gußkristalls *Al* 3 bei 20° und 14° abs. in Abhängigkeit von der Feldstärke wieder und zeigt, daß die absolute Widerstandsvermehrung je Kubikzentimeterwürfel von der Erhöhung des Restwiderstandes annähernd unbeeinflußt bleibt. Auch hierin verhält sich also das Aluminium offenbar anders als die bisher untersuchten Metalle, bei denen die absolute Widerstandszunahme sowohl nach unseren Messungen wie nach einer von Kohler (7) für kubische Metalle mit 2 „freien" Elektronen abgeleiteten Formel umgekehrt proportional dem Widerstand ohne äußeres Magnetfeld ist, unabhängig davon, ob der Restwiderstand durch Verunreinigung oder Verformung verursacht ist.

c) Einfluß der Verunreinigung

Auch wenn der feldfreie Widerstand des *Al* statt durch Verformung durch Verunreinigung bewirkt ist, sinkt die Widerstandszunahme nicht entsprechend der eben angeführten Regel, sondern kann sogar erhöht werden. Dies schließt man aus dem Vergleich unserer Messungen in Abb. 1 mit denjenigen von de Haas und van Alphen (3) (in ihrer Fig. 5, vgl. unsere Abb. 2), die sich auf eine unreinere *Al*-Probe (Widerstandsverhältnis $R_{20°}/R_{273°} = 6{,}7_6 \cdot 10^{-2}$) mit einem demnach fast 10^2fach höheren Restwiderstand beziehen. Hier erscheint nicht nur der Betrag der Widerstandszunahme, sondern auch der qualitative Verlauf der $\Delta\varrho$, H-Kurven verändert; sie steigen mit der Feldstärke beschleunigt statt verzögert an, und $\Delta\varrho$ nimmt mit sinkender Temperatur monoton zu, statt wie in unseren Kurven Abb. 1 und 2 abzunehmen. Eine weitere Untersuchung dieser merkwürdigen Einflüsse des Restwiderstandes haben wir unterlassen, da sie sich kaum sicher erklären lassen.

d) Einfluß der Mosaikstruktur (*Al* 4)

Aus dem gleichen Grunde gehen wir auch auf unsere Messungen an dem Rekristallisationskristall *Al* 4 nur kurz ein. Nach unseren Erfahrungen am Wolframkristall *Wo* 4 (1), der ebenfalls eine Mosaikstruktur aufweist, erwarteten wir für *Al* 4 einen höheren Restwiderstand als für den Gußkristall *Al* 2; tatsächlich zeigte dieser auch ein Widerstandsverhältnis $R_{20°}/R_{273°} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}$, also etwa doppelt so groß wie bei *Al* 2. Diese Erhöhung darf man deshalb der Mosaikstruktur, nicht einer Verformung des *Al* 4 zuschreiben, weil der Stab nach dem kritischen Recken durch Dehlinger (4, 5) längere Zeit getempert wurde

und sowohl durch seine größere Dicke (4 mm statt 2 mm) wie größere Festigkeit [Dehlinger (4)] gegen Verbiegen eher geschützt war. Die absolute Widerstandszunahme des *Al* 4 erwies sich als etwas geringer als bei *Al* 2 und *Al* 3.

Folgerungen aus den Versuchsergebnissen

Die Diskussion unserer Meßergebnisse hat zur Aufgabe, folgende vier Erscheinungen miteinander in Zusammenhang zu bringen:

1. Aluminiumkristalle zeigen eine nur sehr geringe Anisotropie der Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ im magnetischen Querfeld.
2. Bei konstanter tiefer Temperatur nimmt die Widerstandszunahme mit wachsender magnetischer Feldstärke nur verzögert zu.
3. Es tritt ein Längseffekt $\Delta\varrho_\parallel$ auf, der bei 20° abs. weniger als ein Drittel des Quereffektes beträgt.
4. Bei konstanter Feldstärke nimmt die Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\perp$ mit sinkender Temperatur ($T < 40°$ abs.) ab.

Ohne auf die mathematischen Formulierungen der Elektronentheorien im einzelnen einzugehen, erinnern wir zunächst daran, daß es zwei extrem verschiedene Vorstellungen über das Verhalten der Elektronen im Metall gibt. Nach der ursprünglichen Theorie von Sommerfeld sind die Leitungselektronen im Metall völlig frei und können daher wie ein isotropes Gas nach den Methoden der kinetischen Gastheorie sinngemäß behandelt werden; die entsprechenden Rechnungen ergeben dann als Folge eines äußeren magnetischen Querfeldes eine geringe Widerstandsvermehrung, die bei genügend tiefer Temperatur mit steigender Feldstärke notwendig einer Sättigung zustreben muß; der Längseffekt ($\Delta\varrho_\parallel$) soll verschwinden. Nach der zuerst von J. Stark entwickelten Vorstellung dagegen bewegen sich die Leitungselektronen in kristallographischen Vorzugsrichtungen, die durch die elektrostatischen Kräfte der im Kristallgitter regelmäßig angeordneten Metallionen verursacht werden. Gemäß dieser Anschauung sind Anisotropien der elektrischen Widerstandszunahme zulässig, und die neuere Durchrechnung der galvanomagnetischen Erscheinungen hat ergeben, daß nur unter dieser Voraussetzung beträchtliche Widerstandszunahmen ohne nachweisbare Sättigung auftreten können; zugleich wird das Zustandekommen einer endlichen Widerstandsvermehrung im magnetischen Längsfeld zwanglos verständlich, ohne allerdings ihr Verschwinden in gewissen Fällen auszuschließen. [Literatur siehe bei Kohler (7) und de Haas und van Alphen (3).]

Unser Nachweis der starken elektrischen Anisotropie der magnetischen Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ selbst bei den hochsymmetrischen kubischen Metallen, wie *Au* und *W*, spricht also zusammen mit dem großen Betrag und der mangelnden Sättigung der Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\perp$ gegen die ursprüngliche Theorie des freien (isotropen) Elektronengases und für eine tatsächliche anisotrope Bindung der Elektronen, wie dies von Kohler (7) für Wolfram auch theoretisch quantitativ erwiesen worden ist.

Tritt aber umgekehrt eine nur geringe Anisotropie[1]) der Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ auf, wie wir es unter 1. festgestellt haben, und beachtet man außerdem die unter 2. aufgeführte Erscheinung der mit dem äußeren Querfeld nur verzögert zunehmenden Widerstandsvermehrung, so scheint sich danach das Aluminium in seinem galvanomagnetischen Verhalten am meisten von den bisher untersuchten Metallen den Eigenschaften eines Metalles mit einem freien (isotropen) Elektronengas zu nähern; daß aber auch hier noch eine gewisse (anisotrope) Bindung der Elektronen besteht, geht außer aus 1. auch aus der Beobachtung 3. vom Auftreten einer Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\parallel$ im magnetischen Längsfeld hervor.

Zu der 4. Feststellung von der Abnahme der Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\perp$ des Aluminiums bei sinkender Temperatur im festgehaltenen Magnetfeld weisen wir darauf hin, daß die Widerstandszunahme des auf ideale Reinheit extrapolierten Wolframs mit steigender Feldstärke beschleunigt zunimmt und mit sinkender Temperatur anwächst, daß die Widerstandszunahme sehr reinen Goldes (über alle Azimute gemittelt) mit steigender Feldstärke annähernd linear anwächst und für $T < 20°$ abs. annähernd temperaturunabhängig wird. Fügt man hierzu die Feststellung 4. am Aluminium[2]), so kann man diese Erscheinungen durch die Aussage einheitlich beschreiben, daß die Widerstandszunahme im festgehaltenen Magnetfeld bei sinkender Temperatur zunimmt, unverändert bleibt oder abnimmt, je nachdem die Widerstandszunahme bei festgehaltener Temperatur bei wachsendem Magnetfeld beschleunigt, linear oder verzögert ansteigt. Ob es sich hier um einen

1) Hierbei ist auch die ungewöhnlich geringe elastische Anisotropie des Aluminiums nach Goens (8) zu beachten.

2) Auch die Beobachtungen von de Haas und van Alphen über die Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ polykristalliner Metallproben fügen sich ausnahmslos dieser Regel.

wesentlichen Zusammenhang handelt, möchten wir bis zum Vorliegen umfangreicherer Beobachtungen an anderen genügend reinen Metallen nicht behaupten[1]).

Die Frage, ob das hier geschilderte eigentümliche galvanomagnetische Verhalten des Aluminiums typisch für alle supraleitenden Metalle ist, können wir bestimmt verneinen; denn unsere Versuche an Blei, dessen Supraleitfähigkeit wir durch genügend starke Magnetfelder aufgehoben haben, zeigen ganz dem Goldtypus (1) entsprechende galvanomagnetische Erscheinungen.

Auch hier nimmt der magnetische Quereffekt je nach dem Winkel zwischen Magnetfeld und Kristallachsen langsamer oder schneller mit der Feldstärke zu, ohne für mittlere Azimute eine Sättigung erkennen zu lassen, und die Anisotropie ist eher noch stärker als beim Gold.

Der innere Zusammenhang zwischen der 1., 2. und 3. Tatsache wird besprochen; die 4. Erscheinung deutet im Zusammenhang mit früheren Feststellungen an Gold- und Wolframkristallen auf einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Feldstärken- und der Temperaturabhängigkeit des magnetischen Quereffektes. Ein Vergleich zwischen Meßergebnissen am reinsten Gußkristall, verformten Gußkristall und verunreinigtem Metall ergibt einen Einfluß lediglich der Verunreinigung auf die Widerstandszunahme. Mosaikstruktur erhöht den Restwiderstand des *Al*-Kristalls.

Versuche über das Verhalten des ebenfalls supraleitenden Bleies zeigen, daß die merkwürdigen Erscheinungen am Aluminium nicht für alle Supraleiter kennzeichnend sind.

Zusammenfassung

Der elektrische Widerstand von reinsten Aluminiumkristallen wurde bei den Temperaturen des siedenden (78° abs.) und erstarrenden (64° abs.) Stickstoffs, des siedenden (20° abs.) und erstarrenden (14° abs.) Wasserstoffs sowie des siedenden Heliums (4,3° abs.) in Abhängigkeit von magnetischen Querfeldern bis zu 35 kG Feldstärke untersucht. Hierbei ergaben sich hauptsächlich folgende Erscheinungen:

1. Aluminiumkristalle zeigen eine nur sehr geringe Anisotropie der Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ im magnetischen Querfeld.
2. Bei konstanter tiefer Temperatur ($T < 20°$ abs.) nimmt die Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\perp$ mit wachsender magnetischen Feldstärke nur verzögert zu.
3. Es tritt ein Längseffekt $\Delta\varrho_\parallel$ auf, der bei 20° abs. weniger als ein Drittel der entsprechenden Widerstandszunahme $\Delta\varrho_\perp$ im Querfeld beträgt.
4. Bei konstanter Feldstärke zeigt die Widerstandsvermehrung $\Delta\varrho_\perp$ in Abhängigkeit von der Temperatur ein Maximum, das bei der Feldstärke von 18,7 kG etwa bei 40° abs. liegt.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir für die Überlassung eines großen Elektromagneten und Gewährung einer technischen Hilfskraft.

Literaturverzeichnis

1) E. Justi und H. Scheffers, Physik. Zeitschr. **37**, 383 u. 475, 1936; **37**, 700, 1936; **38**, 891, 1937.
2) W. Meißner, Elektronenleitung, galvanomagnetische, thermomagnetische und verwandte Effekte. Handbuch der Experimental-Physik. Bd. XI/1. Leipzig 1935; besonders siehe S. 53 u. 54.
3) W. J. de Haas und P. M. van Alphen, Comm. Leiden Nr. 225a u. Suppl. Nr. 82c.
4) U. Dehlinger, Physik. Zeitschr. **34**, 836, 1933.
5) U. Dehlinger und F. Gisen, Physik. Zeitschr. **35**, 862, 1934.
6) P. Kapitza, Proc. Roy. Soc. London (A) **123**, 292, 1929.
7) M. Kohler, Ann. Phys. 1938, Planck-Festheft; Physik. Zeitschr. **39**, 9, 1938.
8) E. Goens, Ann. Phys. **17**, 233, 1933.

Berlin-Charlottenburg, November 1937.

(Eingegangen 25. November 1937)

1) Nach einer Näherungsformel von Kohler (7) bei Annahme einer mittleren Stoßzeit der Elektronen sollte ein solcher Zusammenhang auch theoretisch bestehen.

Theoretische und experimentelle Beiträge zur Frage der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung

Teil I

Von J. J. Sommer

Bei der laminaren Strömung in einem Rohr hat bekanntlich die Geschwindigkeitsverteilung über den Durchmesser des Rohrquerschnitts die Form einer Parabel, bei der turbulenten dagegen die Form eines beinahe den ganzen Querschnitt ausfüllenden, fast rechteckigen Trapezes, d. h. in der letzten Strömungsart bewegt sich die Flüssigkeit näherungsweise wie ein fester Körper durch das Rohr hindurch. Mit der Aufklärung dieser Geschwindigkeitsverteilung aus der Theorie der turbulenten Strömung beschäftigen sich viele theoretische und experimentelle Arbeiten.

So haben die Arbeiten von T. E. Stanton[1]) und W. Fritsch[2]) ergeben, daß im turbulenten Gebiet mit weitersteigender Geschwindigkeit sich gewisse Änderungen in der Verteilungsform für die wandnahen Strömungsgebiete feststellen lassen, und zwar nimmt mit wachsender Geschwindigkeit bzw. wachsender Reynoldsscher Zahl[3]) der Geschwindigkeitsanstieg des Strömungsprofiles an der Wand zu. Neben dieser Abhängigkeit des turbulenten Geschwindigkeitsprofiles von der Strömungsgeschwindigkeit ist nun auch die Änderung der Verteilungsform vom statischen Druck bzw. von der Dichte des strömenden Mediums von Interesse. Da die Dichte der Flüssigkeiten nur wenig vom Druck abhängt, läßt sich eine solche Abhängigkeit nur bei der Strömung von Gasen beobachten, die ja aber auch denselben Gesetzen gehorcht wie die Strömung der eigentlichen Flüssigkeiten. Aus der oben erwähnten Abhängigkeit der turbulenten Geschwindigkeitsverteilungsform von der Reynoldsschen Zahl kann man hier folgern für die Frage der Druck- bzw. Dichteabhängigkeit, daß man mit vermindertem Druck bzw. mit verminderter Dichte, d. h. kleinerer Reynoldsscher Zahl, einen langsameren Geschwindigkeitsanstieg der Strömung in der Wandnähe zu erwarten hat. Man erhält also eine Annäherung des Geschwindigkeitsprofiles der turbulenten Strömung an das der laminaren. Was die experimentellen Untersuchungen auf diesem Gebiet anbetrifft, so sind bisher allerdings nur Bestimmungen der Fördermenge von Gasen bei vermindertem Druck veröffentlicht worden, die nur indirekt einen Schluß auf die Form des Geschwindigkeitsprofiles zulassen. Diese Messungen wurden bei Drucken zwischen 760 mm bis 1 mm *Hg* unter so hohen Strömungsgeschwindigkeiten gemacht, daß nach der Reynoldsschen Bedingung turbulente Strömung zu erwarten gewesen wäre. Man fand jedoch, daß auch dann noch die Fördermenge in guter Näherung aus den Gesetzen der laminaren Strömung berechenbar blieb und schloß daraus auf eine parabelförmige Geschwindigkeitsverteilung. In Verbindung mit der oben gezogenen Folgerung über den Geschwindigkeitsanstieg in der Nähe der Rohrwand in Abhängigkeit vom Druck kann man hier schließen, daß man bei der Strömung von Gasen unter vermindertem Druck in Abhängigkeit von diesem statischen Druck bei Geschwindigkeiten oberhalb der Turbulenzgrenze wahrscheinlich eine weitere allmähliche Umbildung der turbulenten in die laminare Geschwindigkeitsverteilungsform zu beobachten haben wird. Denn ein langsamerer Geschwindigkeitsanstieg bei sinkendem Druck heißt ja nichts anderes als Angleichung der turbulenten an die laminare Geschwindigkeitsverteilungsform über den Flüssigkeitsquerschnitt. Weitergehende Schlüsse auf die Entstehung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung aus der laminaren würde man jedoch erst ziehen können, wenn man direkte Messungen der Geschwindigkeitsverteilung in einem strömendem Gase unter vermindertem statischem Druck anstellen würde. Diese Messungen müßten bei hohem statischem Druck und hinreichend großer Geschwindigkeit die Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Strömung zeigen, dagegen bei niederem Druck die Geschwindigkeitsverteilung der laminaren. Solche direkten Messungen der Geschwindigkeitsverteilung in einem Gase bei verschiedenen statischen Drucken sind in der vorliegenden Arbeit angestellt worden. Faßt man die turbulente Strömung auf als zusammengesetzt aus einem turbulenten Kern und aus einer laminaren Randschicht (der Grenzschicht), so bedeutet der oben geschilderte Übergang der turbulenten in die laminare Strömung, daß mit abnehmendem Druck die Grenzschichtdicke des Geschwindigkeitsverteilungsprofiles[1]) zunimmt. Die in dieser Arbeit geschilderten Messungen der Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Strömung bei sinkendem statischem Druck werden dann gleichzeitig diese Zunahme der Grenzschichtdicke quantitativ erkennen lassen. Mit diesen Versuchen ergibt sich fernerhin die Möglichkeit der weiteren Verfolgung des neuerdings von L. Prandtl[2])

1) Proc. Roy. Soc. London **85**, 366, 1911.
2) Z. a. M. M. **1**, 268, 1921.
3) Reynoldssche Zahl $R = \frac{v \cdot d}{\mu/\varrho}$, wo v Strömungsgeschwindigkeit, d Rohrdurchmesser, ϱ Dichte und μ Koeffizient der inneren Reibung des strömenden Mediums.

1) Geschwindigkeitsverteilung einer turbulenten Strömung heißt natürlich immer Verteilung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeitswerte.
2) Z. d. V. D. I. **77**, 105–114, 1933.

gemachten und von anderen fortgeführten Versuches, die turbulenten Strömungserscheinungen auf statischer Grundlage anschaulich unter Verwendung des von ihm eingeführten Begriffes der freien Mischungsweglänge zu behandeln.

In dem ersten Teil der Arbeit soll zunächst eine Übersicht über diese Auffassung der Turbulenzerscheinungen gegeben und weiterhin versucht werden, diese anschaulichen Überlegungen noch weiter bis zur Frage nach der Art der einzelnen Elementarprozesse der statistischen Elemente zu vertiefen. Im zweiten Teil wird dann über die durchgeführten Versuche und ihre Ergebnisse berichtet werden.

I. Teil

Theoretische Betrachtungen zur statistischen Turbulenztheorie

1. Allgemeiner Überblick

Schon seit längerer Zeit sind Versuche[1]) vorhanden, die turbulente Strömungsform als eine Erscheinung auf statistischer Grundlage zu erklären und zu analysieren. Die voll ausgebildete Turbulenz[2]) wird dabei bekanntlich aus einer stationären oder jedenfalls wenig veränderlichen (quasistationären) mittleren Bewegung und darüber gelagerten, rasch veränderlichen willkürlichen Schwankungen aufgebaut gedacht. Eine besondere Schwierigkeit bildet die Frage, was man zu Elementen einer solchen Statistik machen soll. Bezüglich dieser Wahl der Elemente sind verschiedene Versuche gemacht worden. Je nach der Wahl der Elemente kann man die bisher vorliegenden Arbeiten in zwei Gruppen einteilen.

Die erste Gruppe versucht den Aufbau einer solchen statistischen Theorie, indem zunächst mehr oder weniger begründete Eigenschaften der Strömung zu Elementen der Statistik gewählt werden. So wird z. B. der gesamte Strömungsvorgang durch die Werte einer Strömungsfunktion beschrieben gedacht, die diskontinuierlich für die Punkte eines engmaschigen Gitters angenommen werden. Die Werte der Stromfunktion sollen dann die Elemente der Statistik für einen neuen Phasenraum bilden. Eine eingehende Erörterung dieser Punktgittermethode[3]) ergibt dann, daß man dreidimensionale Gitter zugrunde legen muß, was zu erheblichen mathematischen und auch zu anschaulichen Schwierigkeiten führt. — Ein anderer Weg der Lösung wurde von Th. v. Kármán versucht, indem er die Bewegung des Kontinuums aus Eigenschwingungen aufbaut, wogegen sich aber Einwände erheben lassen[1]). Ferner wurden zu Elementen einer statistischen Turbulenztheorie isolierte Wirbelfäden angenommen, aus denen man sich näherungsweise das kontinuierliche Strömungsfeld aufgebaut denkt. Mit einer solchen Statistik von Punktwirbeln von gleicher Stärke und gleichem Drehsinn hat sich bereits Burgers[2]) beschäftigt. F. Noether[3]) hat ferner die mögliche Wirbelverteilung diskutiert in einer ebenen Kanalströmung im Zusammenhang mit der der Karmanschen Wirbelstraße entsprechenden Wirbelkonfiguration. Eine besondere Schwierigkeit bei der Berechnung der Wirbelverteilung bildet die Unsicherheit über die Berechnung der Wahrscheinlichkeit solcher Verteilungen. Außerdem können Bedenken gegen die bei den bisherigen Wirbelstatistiken üblichen Annahmen gleichen Drehsinnes erhoben werden. Aus experimentellen Erfahrungen weiß man, daß bei der turbulenten Bewegung Drehbewegungen mit verschiedener Achsenlage (parallel und senkrecht zur Strömungsrichtung) eine wichtige Rolle spielen.

Am aussichtsreichsten und am weitesten durchgeführt scheint nun die von H. Gebelein[4]) entwickelte statistische Turbulenztheorie. Gebelein geht bei seinen Überlegungen von den Kolmogoroffschen Differentialgleichungen aus, die er in Zusammenhang bringt mit den allgemeinen Strömungsgleichungen. Je nach der verschiedenen Wahl der statistischen Elemente gelangt er von den Kolmogoroffschen Gleichungen entweder zu den Eulerschen Gleichungen oder zu den Navier-Stokesschen Gleichungen, oder endlich zu einem neuen Gleichungsschema, das er der turbulenten Bewegung zuordnet. Für diese letzteren Gleichungen ist maßgebend eine statistische Verteilung des Rotationsvektors. Es gelingt ihm dann zu zeigen, daß man alle wesentlichen Eigenschaften der turbulenten Strömung, wie man sie in Rohren und Kanälen beobachtet hat, aus diesen Gleichungen ableiten kann. R. v. Mises macht in der Besprechung des Gebeleinschen Buches[5]) darauf aufmerksam, daß die hier gegebenen Ableitungen und gezogenen Schlüsse noch nicht restlos zwingend sind. Unter diesen Umständen sind die Gedankengänge Gebeleins nicht immer von besonderer

1) Handb. f. exp. Phys., Bd. IV, 1, S. 291 ff., wo weitere Literaturangaben zu finden sind, ferner Th. v. Kármán, Proc. of the 1. Intern. Congress of appl. Mechanics Delft, S. 97, 1924; J. M. Burgers, Proc. Konigl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam **32**, 414, 643, 818 und **36**, 276, 390, 487, 1933; L. Prandtl, l. c.

2) Das heißt, die Frage der Turbulenzentstehung bleibt hier unerörtert.

3) J. M. Burgers, l. c.; W. Tollmien, Z. a. M. M. **13**, 331—347, 1933.

1) l. c.

2) l. c.

3) Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 125, 1921.

4) H. Gebelein, Turbulenz. Springer, Berlin 1935.

5) Zentralbl. f. Mech. **3**, 272, 1936.

Anschaulichkeit, wodurch andere Wege an Wert gewinnen, die zwar weniger tief aber vor allem die Anschaulichkeit betonen. Zu diesen Wegen gehören nun die Arbeiten, die zunächst von L. Prandtl[1]) und dann weiter von G. I. Taylor[2]) veröffentlicht worden sind. Die ganzen Überlegungen knüpfen an den von L. Prandtl eingeführten Begriff der freien Mischungsweglänge an, der für die Turbulenzstatistik eine ähnliche Rolle spielt wie der Begriff der freien Weglänge in der kinetischen Gastheorie. Wie sich aus dem zusammenfassenden Bericht von L. Prandtl[3]) ergibt, lassen sich eine ganze Reihe Eigenschaften der turbulenten Strömung überraschend einfach auf Grund dieser Überlegungen verstehen. Die Grundannahme, von der hier bei allen Betrachtungen ausgegangen wird, ist die einer bestimmten Mischungsweglängenverteilung. Die bisher mittels dieser Anschauung erzielten Ergebnisse führen immer wieder zu dem Versuch, von diesen Annahmen der Weglängenverteilung ausgehend, die Frage zu beantworten, was für Eigenschaften müssen die Elemente einer Statistik haben, um auf solche Weglängenverteilungen zu führen. G. I. Taylor hat zwar in seiner Arbeit versucht, gerade diese Fragen auszuschalten, indem er darauf hinwies, wie leicht man auf diesem Wege zu irrigen Schlüssen und Folgerungen kommt. Er versucht daher, den von Prandtl eingeführten Begriff der freien Mischungsweglängen noch in anderer Weise zu definieren unter Vermeidung der Beziehungen zu gaskinetischen Vorstellungen. Er führt dabei den Begriff einer Korrelationsfunktion ein, die zwei benachbarte Flüssigkeitsteilchen bezüglich ihrer Eigenschaften miteinander verbindet. Die freie Mischungsweglänge ergibt sich dann als Wirkungsgrenze, wo gerade dieser gegenseitige Einfluß verschwindet. Die Zeitdauer der gegenseitigen Einwirkung wird hierbei als außerordentlich klein vorausgesetzt, was in einem gewissen Gegensatz steht zu den Überlegungen von Gebelein, die ja im Zusammenhange mit der kinetischen Gastheorie stehen und wobei sich für die Verweilzeit ein relativ großer Wert ergibt. Andererseits ist es richtig, daß es Schwierigkeiten macht, bei Festhalten an der gaskinetischen Basis gewisse Eigenschaften, die sich auf den besonders guten Wärmetransport beziehen, zu erklären. Man wird also, wenn man die Frage nach der Eigenschaft der Statistikelemente erforschen will, mit außerordentlicher Vorsicht vorzugehen haben. Unter Berücksichtigung aller dieser Einwände werden wir uns im ersten Teil der vorliegenden Arbeit mit diesem Problem beschäftigen.

Ehe wir aber weiter auf die oben definierte Fragestellung eingehen, soll kurz auf die zweite Schwierigkeit hingewiesen werden, die bei den statistischen Betrachtungen berücksichtigt werden muß. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fällen der Statistik hat man hier zu beachten, daß das vorliegende System nicht konservativ ist oder, mit anderen Worten: die Konstanz der Energie des Systems bleibt bei der Turbulenz nicht erhalten. Bei der Untersuchung der Verteilungswahrscheinlichkeiten der statistischen Elemente erhebt sich also die schwierige Frage, welche Nebenbedingung an Stelle der bei den übrigen physikalischen Statistiken üblichen der Energiekonstanz zu setzen ist. Durch die Untersuchungen von v. Kármán[1]) ist es zweifelhaft geworden, ob die früher viel benutzte Rayleighsche Dissipationsbedingung die richtige Nebenbedingung ist. Diese letztere nahm an, daß die der Hauptbewegung durch den Impulstransport entzogene Energie für die Nebenbewegung (Schwankungsbewegung) ebenso groß ist wie die von der Nebenbewegung infolge der Reibung zerstreute Energie. Kármán konnte nun bei seinen Untersuchungen zeigen, daß man experimentell gut verifizierbare Ergebnisse bekommt, wenn man die Reibung im Innern der Flüssigkeit vernachlässigt und nur in einer dünnen Schicht am Rande der Flüssigkeit berücksichtigt. Demnach scheint die Reibung keine so ausschlaggebende Rolle zu spielen, wie in der Rayleighschen Bedingung angenommen wird.

Wir werden uns für das folgende mehr der Kármánschen Auffassung anschließen.

2. Die Frage des elementaren Kraftgesetzes der statistischen Elemente

Wie Clausius bei seinen ersten Versuchen der kinetischen Gastheorie zunächst von einem auschaulichen physikalischen statistischen Bild ausgegangen ist, so soll auch hier an die Spitze dieser ganzen Betrachtungen ein anschauliches Bild gestellt werden. Es muß sich dann zeigen, was alles für Folgerungen in bezug auf die Mischungsweglängen und ihre Verteilung sich hieraus ergeben. Eine Durchführung der statistischen Betrachtungen unter Zugrundelegung des Begriffes der Mischungsweglängen und ihrer Verteilung, wie L. Boltzmann das z. B. bei der kinetischen Gastheorie durchgeführt hat, bliebe dann immer noch als weitere Aufgabe.

1) Zeitschr. a. M. M. **5**, 136, 1925; Verh. des 2. intern. Kongr. f. techn. Mech. Zürich, S. 7, 1927.
2) Proc. Roy. Soc. London (A) **151**, 421—444, 1935.
3) Zeitschr. d. VDI., l. c.

1) Th. v. Kármán, Gött. Nachr. Math.-Phys. Kl., S. 58, 1930 und Verh. d. 3. intern. Kongr. f. angew. Mech. Stockholm **1**, 85, 1930.

Wir denken uns jetzt eine voll ausgebildete turbulente Rohrströmung folgendermaßen charakterisiert: Am Rande der Strömung tritt infolge der Rauhigkeit der Wandung eine fortlaufende Ablösung von Wirbeln ein, die in die Flüssigkeit hineinwandern, Stöße untereinander erleiden, wobei sie dauernd an Wirbelenergie verlieren, und die schließlich nach Abgabe ihrer gesamten Wirbelenergie an die Umgebung ihre Selbständigkeit aufgeben und in dem Strömungsmedium wieder aufgehen. Außer diesem Energieverlust, den die Wirbel infolge der Zusammenstöße untereinander erleiden, kommt noch der hinzu, der aus der Bewegung der Wirbel in dem strömenden Medium an sich entsteht, d. h. kurz gesagt, der Energieverlust, der bei der Bewegung eines Körpers im widerstehenden Medium eintritt. Wegen der oben angedeuteten Schwierigkeit, etwas über die Achsenlage dieser abgelösten Wirbel auszusagen, kann man auch den Vorgang so formulieren: Infolge der Ablösung der Strömung an der Wand werden Flüssigkeitsballen gebildet, die aber im Gegensatz zur kinetischen Gastheorie neben der Translationsenergie wesentlich mit Rotationsenergie ausgestattet sind. Diese Flüssigkeitsballen wandern nun ins Innere der Strömung, wobei sie fortwährend untereinander Zusammenstöße erleiden, die im allgemeinen mit Energieverlust verbunden sein werden. Hierzu kommt noch der Energieverlust, den die Flüssigkeitsballen dadurch erleiden, daß sie auch ohne Zusammenstöße dauernd Energie an ihre Umgebung abgeben, d. h. vom Standpunkt der Wirbel aus gesehen: Wir berücksichtigen die Tatsache, daß in einem zähen Medium ein Wirbelfaden sich dauernd auszubreiten bestrebt ist[1]) und dabei auch absolut an Energie verliert. Für die folgenden rein qualitativen Überlegungen, die in einer gewissen Anlehnung an gaskinetische Vorstellungen angestellt werden sollen, ergeben sich zwei Möglichkeiten: Entweder wir betrachten eine Statistik ausschließlich von Wirbelfäden und vernachlässigen die Bewegung der Wirbelfäden in einem zähen Medium. Dann sind wir gezwungen, anzunehmen, daß wir eine relativ hohe Konzentration von solchen Wirbelfäden vorliegend haben. Die ganzen Überlegungen knüpfen dann an die Betrachtungen von van der Waals an, die die Kraftwirkungen der Elemente des Mediums zur Voraussetzung für alle weiteren Überlegungen haben. In diesem Sinne haben wir dann an die Spitze unserer Betrachtungen ein Kraftgesetz zu stellen, das der Einwirkung der Wirbelfäden aufeinander Rechnung trägt.

Als zweite Möglichkeit ist natürlich auch eine Statistik mehr im Sinne der Brownschen Molekularbewegung denkbar, wo die Kraftwirkung der einzelnen Teilchen aufeinander gegenüber den Reibungskräften, die die Teilchen bei der Bewegung in dem reibenden Medium erfahren, zurücktritt. Bei den hier angestellten Überlegungen machen wir von der ersten Form der Statistik Gebrauch, d. h. wir vernachlässigen das die Wirbelfäden umgebende Medium und betrachten die reine Kraftwirkung der einzelnen Wirbelfäden aufeinander wie in der kinetischen Gastheorie. Andererseits tragen wir dieser an und für sich bedenklichen Vernachlässigung dadurch etwas Rechnung, daß wir bei der Annahme des zwischen den Wirbelfäden bzw. Flüssigkeitsballen gültigen Kraftgesetzes annehmen, daß dasselbe eine Funktion der Zeit ist und mit wachsender Zeit abnimmt. Wir setzen also als Kraftgesetz zwischen den Flüssigkeitsballen folgende Beziehung voraus:

$$K = \frac{k e^{-at}}{r^2}, \qquad (1)$$

wobei wir uns an bekannte Betrachtungen über die Bewegung und Beeinflussung zweier Wirbelfäden in der Dynamik reibungsloser Flüssigkeiten erinnern[1]). In diesem Falle gilt bekanntlich als Kraftgesetz zwischen den Wirbelfäden:

$$K = \frac{k}{r^2}. \qquad (2)$$

Hierbei bedeutet k bis auf einen konstanten Faktor die Zirkulation des Wirbelfadens. Dabei handelt es sich bei dieser Kraftwirkung zwischen den Wirbelfäden um Anziehungskräfte, wenn der Drehsinn der beiden betrachteten Fäden entgegengesetzt ist, bzw. um Abstoßungskräfte, wenn der Drehsinn derselbe ist. In Ermangelung genauerer Kenntnis des Drehsinnes der Wirbelfäden wird hier gleicher Drehsinn für alle Wirbelfäden vorausgesetzt.

Durch Vergleich von Gleichung (1) und (2) ergibt sich sofort, daß die obige Annahme des Kraftgesetzes dem Umstande Rechnung trägt, daß die Flüssigkeitsballen nach einiger Zeit wieder im Medium aufgehen. Dies ist der Fall für hinreichend große Werte von at, für die $K \to 0$. Bleibt man in dem oben entwickelten Bilde, so wird es sich als vorteilhaft erweisen, das Kraftgesetz in folgender nicht wesentlich verschiedener Form anzunehmen:

$$K = \left\{ \frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2}{r^2} e^{-at} \right\}, \qquad (3)$$

1) C. W. Oseen, Arch. f. Math. u. Phys. **7**, Nr. 14, 1911.

1) Vgl. z. B. Prandtl-Tietjens, Hydro- und Aeromechanik **1**, 194, 1929.

wobei k_1 eine sehr kleine Größe von der Größenordnung der Anziehungskräfte der Moleküle des Mediums sein soll. Diese letzte Gleichung sagt dann im Gegensatz zu Gleichung (1) nur aus, daß die Kräfte zwischen den Flüssigkeitsballen nicht vollkommen verschwinden, sondern allmählich den Kräften zustreben, die zwischen den Molekülen des Mediums herrschen.

Von diesem Kraftgesetz ausgehend [Gleichung (3)], kann man nun in ähnlicher Weise versuchen, wie Maxwell[1]) es im Falle der kinetischen Gastheorie durchgeführt hat, alle statistisch wichtigen Fragen wie Verteilungsgesetz, freie Weglänge usf. zu bestimmen. Obwohl die rechnerische Durchführung dieser Fragen in geschlossener Form nicht möglich ist, wie von vornherein zu erwarten war, so kann man doch eine ganze Reihe von, wie mir scheinen will, nicht unwichtigen Schlüssen ziehen. Ehe wir uns aber mit den einzelnen Fragen weiter beschäftigen, sollen noch zwei Bemerkungen eingeschoben werden.

Es war oben bereits darauf hingewiesen worden, daß im Rahmen einer Wirbelstatistik die Frage nach der Achsenrichtung der einzelnen Wirbelfäden Schwierigkeiten bereitet. Wie wirkt sich jetzt diese Frage auf das oben angenommene Kraftgesetz und das Bild von dem Flüssigkeitsballen aus? Was zunächst die verschiedene Achsenlage anbetrifft, so kann man leicht an Hand des Falles der Beeinflussung zweier Wirbelfäden sich klar machen, daß es in vielen Fällen ausreicht, für die Kraftwirkung die Intensität des einen Wirbelfadens durch die Komponente der Intensität in Richtung des anderen Wirbelfadens zu ersetzen. Für das Kraftgesetz heißt das, daß k_2 nicht immer denselben Wert hat, sondern alle möglichen Werte annehmen kann. Da aber aus experimentellen Erfahrungen bekannt ist, daß in den speziell zu betrachtenden Fällen eine bestimmte Achsenlage überwiegend vorhanden ist, so kann k_2 im Mittel als konstant angesehen werden oder, mit andern Worten, die Achsenlage im Mittel als parallel genommen werden. Viel einschneidender scheint mir in der Tat eine andere Annahme zu sein, die wir stillschweigend gemacht haben, indem wir von den Wirbelfäden zu dem Begriff der Flüssigkeitsballen und dem obigen Kraftgesetz übergingen. Die obige Beziehung setzt nämlich voraus, daß das Kraftfeld um die Flüssigkeitsballen kugelsymmetrisch ist. Im Rahmen der Wirbelstatistik heißt das aber, daß wir nicht mit Wirbelfäden rechnen, sondern mit Punktwirbeln. In Wirklichkeit haben wir es aber bei der ausgebildeten Turbulenz sicher mit Wirbelfäden zu tun, deren Kraftfelder nicht kugelsymmetrisch, sondern wesentlich axialsymmetrisch sind. Dazu muß man sich vor Augen halten, daß die Helmholtzschen Wirbelsätze nicht nur für reibungslose, sondern auch für zähe Flüssigkeiten gelten[1]). Das heißt insoweit, daß auch in unserem Falle die Wirbelfäden nur an der Wandung der Strömung beginnen und endigen können. Es ist hiernach ohne weiteres klar, daß die aus den Arbeiten von Taylor und P. Ruden[2]) folgende Unterscheidung von zwei Arten von Turbulenz: Wandturbulenz bzw. Strahlturbulenz (d. h. Wandturbulenz mit überwiegend Wirbelfäden senkrecht zu den Stromlinien und Strahlturbulenz mit Wirbelfäden überwiegend parallel zur Hauptströmungsrichtung) bei unsern statistischen Überlegungen nur dann in die Erscheinung treten kann, wenn wir den Flüssigkeitsballen axialsymmetrische Kraftfelder zuordnen. Wenn wir also die folgenden Betrachtungen mit dem obigen Kraftansatz durchführen, so nur aus dem Grunde, weil die mit ihm erzielten Resultate bereits eine Reihe wichtiger Tatsachen wiederzugeben vermögen. Es hat aber nach den vorher gemachten Bemerkungen keinen Sinn, über die qualitativen Resultate hinaus etwa noch quantitative Übereinstimmungen zu suchen.

Die zweite Bemerkung gilt der oben bereits erwähnten und besprochenen Nebenbedingung. Wenn wir uns die von Th. v. Kármán entwickelten Anschauungen zu eigen machen, so können wir folgendes im Rahmen unserer statistischen Anschauungen mit dem Flüssigkeitsballen sagen: Beim Beginn der turbulenten Strömungsform wird der Hauptbewegung eine bestimmte Energiemenge entzogen, die zur Bildung der Wirbelfäden an den Begrenzungen der Strömung verwandt wird. Der größte Teil dieser Energie wird aber der Hauptströmung bei der nachfolgenden Ausbreitung und Wanderung des Wirbelfadens in Form von Wärme wieder zurückgegeben, so daß man in hinreichender Entfernung von der Wandung in erster Näherung die Gesamtenergie der Wirbelfäden als konstant betrachten kann. In der Nähe der Wandung, d. h. an den Enden der Wirbelfäden, wird dagegen dauernd Energie, wenn auch nur im geringen Maße — geringe Wandrauhigkeit vorausgesetzt —, abgegeben. Der Ersatz für diese verlorene Energie wird unmittelbar der Umgebung entnommen, weshalb in der Nähe der Strömungsgrenzen keine Energiekonstanz mehr vorhanden ist. Unter diesen Voraussetzungen kann man sofort einige Aussagen über das Verteilungsgesetz der Flüssigkeitsballen machen. Im Innern des Mediums nämlich, wo in erster Näherung

1) J. Cl. Maxwell, Phil. Trans. A. I, 1879.

1) Vgl. z. B. Handb. d. Phys., Bd. VII, Artikel von Lagally, S. 27.
2) l. c.

Energiekonstanz angenommen ist, werden die translatorischen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsballen einer Maxwellschen Verteilung zustreben bzw. sie in erster Näherung besitzen. Am Rande der Strömung haben wir dagegen stärkere Abweichungen von einer Maxwellverteilung zu erwarten [1]).

Schließlich möchte ich noch darauf hinweisen, daß die Zugrundelegung des Falles zweier Wirbelfäden in einer reibungslosen Flüssigkeit für unser Kraftgesetz [d. h. Gleichung (2)] natürlich auch bereits eine Näherung darstellt. Den Fall zweier Wirbelfäden in einer zähen Flüssigkeit, der eigentlich herangezogen werden müßte, hat Oseen [2]) zu behandeln versucht. Doch gelangt er zu keinen diskutierbaren geschlossenen Ausdrücken. Die Berechtigung zu der obigen Näherung liegt denn auch im wesentlichen in den Kármánschen Anschauungen begründet, die die Zähigkeit im Innern der Strömung vernachlässigt.

3. Die innere Reibung der Flüssigkeitsballen und der Begriff der freien Mischungsweglänge

Unter der Voraussetzung des oben entwickelten statistischen Bildes und unter Anwendung des oben angenommenen Kraftgesetzes:

$$K = \left\{k_1 + k_2 e^{-\alpha t}\right\} \frac{1}{r^2} \tag{3}$$

wollen wir jetzt die Frage der inneren Reibung behandeln, wobei sich auch zugleich die aus anderen Betrachtungen in der Strömungslehre bekannte Definitionsgleichung der Mischungsweglänge ergibt. Die nachfolgenden Betrachtungen schließen sich dabei eng an die von Prandtl [3]) und Tollmien [4]) gegebenen Ableitungen an.

In Analogie zur kinetischen Gastheorie [5]) können wir im Übergangsgebiet die innere Reibung auf Grund der Austauschbewegung erklären, d. h. wenn wir zwei benachbarte Schichten von Flüssigkeitsballen betrachten, so bekommen dieselben infolge der Zusammenstöße auch Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu der Schicht. Daher gelangen die Flüssigkeitsballen der einen Schicht auch in die andere und umgekehrt. Nimmt man an, daß die Flüssigkeitsballen im Mittel die Geschwindigkeit bzw. die Bewegungsgröße der Schicht haben, aus der sie stammen, so werden sie die andere Schicht beschleunigen bzw. verzögern, je nachdem die Geschwindigkeit der ankommenden Ballen größer oder kleiner ist als die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsballen im Mittel in der anderen Schicht. Die durch diesen Impulsaustausch charakterisierte Reibungskraft pro Flächeneinheit können wir uns in derselben Weise wie in der kinetischen Gastheorie gegeben denken:

$$R = \eta \frac{dv}{dy}, \tag{4}$$

wobei diese Reibungskraft pro Flächeneinheit auch als scheinbare Schubspannung bezeichnet wird. $\frac{dv}{dy}$ bezeichnet hier das Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Hauptströmungsrichtung, η ist der Koeffizient der inneren Reibung, der nach der kinetischen Gastheorie mit der Dichte ϱ des Mediums, der mittleren Geschwindigkeit c der Moleküle und der freien Weglänge λ durch die Beziehung verbunden ist:

$$\eta = n \cdot \varrho \cdot c \cdot \lambda. \tag{5}$$

n ist hier ein Zahlenfaktor, der sich nach Boltzmann [1]) zu 0,3503 bzw. nach einer Näherung zu $^1/_3$ ergibt.

In unserem Falle der Flüssigkeitsballen können wir in ähnlicher Weise folgende Formel ableiten: Dazu berechnen wir die gesamte Bewegungsgröße, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit getragen wird und die gleich der Reibung R ist.

Hat man n Flüssigkeitsballen in der Volumeneinheit, die eine Geschwindigkeit v in der Hauptströmungsrichtung und eine Geschwindigkeit v_y senkrecht dazu besitzen, so ist die Reibung R gegeben durch:

$$R = \sum n \cdot m \cdot v' v'_y, \tag{6}$$

wo m die Masse der einzelnen Flüssigkeitsballen ist und v' bzw. v'_y die Geschwindigkeitsänderungen. Die Summe ist über sämtliche Flüssigkeitsballen zu erstrecken für positive und negative v_y,

1) Die hier diskutierte Frage nach der Maxwellverteilung ist wohl von der oben erörterten Frage der Geschwindigkeitsverteilung über den Durchmesser des Rohrquerschnitts zu unterscheiden. Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung entsteht bekanntlich durch die Zusammenstöße und den damit verknüpften Geschwindigkeitsaustausch der einzelnen Partikelchen. Die oben erwähnte Geschwindigkeitsverteilung ist in diesem Zusammenhange die Verteilung der aus der Maxwellverteilung berechneten „mittleren" Geschwindigkeit über den Durchmesser des Rohrquerschnitts.

2) Arch. f. Math. o. Phys. l. c.

3) Prandtl, l. c.

4) Handb. d. Exp.-Phys. von Wien-Harms, Bd. IV, 1, Artikel Turbulenz, S. 309 ff.

5) Vgl. z. B. G. Jäger, Fortschritte der kinetischen Gastheorie, S. 32 ff., Braunschweig 1919.

1) Vgl. Vorlesungen über Gastheorie, S. 79, 1896–98.

d. h. sowohl für Bewegungen in der positiven als auch in der negativen y-Richtung. Setzen wir nun fest, daß die Flüssigkeitsballen, die aus der einen Richtung kommen, eine etwas andere Bewegungsgröße besitzen als die der anderen Richtung, so erhält man mit $v_1 = v$ und $v_2 = v + \frac{dv}{dy} \cdot l$, wo l die freie Weglänge bedeutet, für die Geschwindigkeitsänderung v':

$$v' = l \frac{dv}{dy} = v_2 - v_1,$$

und damit für R:

$$R = \sum n \cdot m \cdot v'_y \cdot l \frac{dv}{dy} \qquad (7)$$

unter der Voraussetzung, daß gleichviel Flüssigkeitsballen sich in beiden Richtungen bewegen.

Ferner ergibt sich die Größe v'_y aus folgender Überlegung: Der Energiezuwachs in der Querrichtung zur Hauptströmungsrichtung ist gleich:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \sum n m \frac{1}{2}\left(v + l\frac{dv}{dy}\right)^2 - \sum n m \frac{1}{2} v^2.$$

Diese Energieänderung ist aber in erster Näherung gleich der Bewegungsenergie der Querbewegung:

$$\sum n m \frac{1}{2} v'^2_y = \Delta E.$$

Damit erhält man, wenn man noch berücksichtigt, daß das Glied $\sum n m l v \frac{dv}{dy}$ verschwindet wegen der Voraussetzung, daß gleichviel Flüssigkeitsballen sich in beiden Richtungen bewegen oder, mit anderen Worten, daß gleichviel Flüssigkeitsballen mit positiven bzw. negativen $\frac{dv}{dy} \cdot l$ (Geschwindigkeitszuwächsen) vorhanden sind:

$$\sum n m \frac{1}{2} v'^2_y = \sum n m \frac{1}{2} v^2 + \sum n m l v \frac{dv}{dy} + \sum n m \frac{1}{2} l^2 \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 - \sum n m \frac{1}{2} v^2$$

oder

$$v'_y = l \frac{dv}{dy}. \qquad (8)$$

Eigentlich ist diese Abschätzung von v'_y streng genommen unzulässig, und wir haben statt dessen die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeiten v und v_y sowie der freien Weglänge l zu berücksichtigen. Da diese Funktionen aber zunächst unbekannt sind, kann man versuchen, zu einer ersten rohen Abschätzung zu kommen, indem man für v'_y den obigen Wert einsetzt und v bzw. l mit den entsprechenden Mittelwerten identifiziert. Wir erinnern uns dabei analoger Überlegungen in der kinetischen Gastheorie, wobei die strenge Durchführung der Rechnung nur eine Änderung des Zahlenfaktors ergibt. Setzt man zunächst willkürlich in unsere Rechnung diesen Zahlenfaktor $= l$, was einer Definitionsänderung von l gleichkommt, so erhält man für die Reibung:

$$R = \varrho \left[l \cdot \frac{dv}{dy} \right]^2, \qquad (9)$$

wobei $\varrho = nm$. Diese Beziehung unterscheidet sich lediglich durch die Potenz von l und $\frac{dv}{dy}$ von der entsprechenden gaskinetischen Gleichung [Gleichung (4) und (5)]. Die Ableitung hier ist, wie oben erwähnt, identisch mit der von Tollmien gegebenen.

4. Der Stoßvorgang und die Berechnung der freien Weglängen.

In diesem Abschnitt soll nun versucht werden, die freie Weglänge auf Grund des elementaren Stoßvorganges zu berechnen, wobei das oben angenommene Kraftgesetz [Gleichung (3)] zugrunde gelegt wird unter der üblichen Annahme, daß Dreierstöße ausgeschlossen sind.

Wir denken uns also zwei Flüssigkeitsballen, die sich aufeinander zu bewegen und dabei Kräfte gemäß dem Gesetz [Gleichung (3)] aufeinander ausüben. Dann erhält man unter Zugrundelegung eines xy-Koordinatensystems folgende Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= k_1 \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + k_2 e^{-at} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\ddot{y} &= k_1 \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + k_2 e^{-at} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}\right| \qquad (10)$$

Aus diesen ergibt sich mit Einführung von Polarkoordinaten r, φ und durch Multiplikation mit x, y bzw. $\dot{x}$, $\dot{y}$ sowie nachfolgender Addition bzw. Subtraktion:

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) &= m(-2\dot{r}\dot{\varphi}r - r^2\ddot{\varphi}) = -m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0, \\ m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y}) &= (k_1 + k_2 e^{-at})\left(\frac{x\dot{x}}{r^3} + \frac{y\dot{y}}{r^3}\right). \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen, die besagt, daß trotz des geänderten Kraftgesetzes der Flächensatz noch besteht, kann sofort integriert werden und ergibt:

$$r^2\dot{\varphi} = K \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{\varphi} = \frac{K}{r^2}. \tag{12}$$

Setzt man diese Gleichung in die zweite Gleichung von (11) ein, so erhält man:

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) = -\left|k_1 + k_2 e^{-at}\right|\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{13}$$

und einmal integriert:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{K}{r^2}\right) = -\left|k_1 + k_2 e^{-at}\right|\frac{1}{r} + ak_2\int^{r}\frac{e^{-at}}{r}\,dt + C_1. \tag{13a}$$

Dieses Integral läßt sich nun nicht in geschlossener Form auswerten, aber wir können bereits aus der Gleichung (13a) eine Reihe wichtiger Tatsachen folgern.

Was zunächst die resultierende Bahnkurve anbetrifft, die man erhält, wenn der eine Flüssigkeitsballen ruhend und nur der andere als sich bewegend gedacht wird mit einer Geschwindigkeit, die der Relativgeschwindigkeit des einen gegenüber dem anderen Flüssigkeitsballen entspricht, so kann man leicht folgendes einsehen: Zur Zeit $t = 0$, wo das Kraftgesetz für ein kleines Zeitintervall Δt in der Form: $\frac{k_1 + k_2}{r^2}$ angenommen werden kann, ergibt die Integration der Bewegungsgleichungen, daß die Bahnkurve eine Hyperbel ist. In entsprechender Weise kann man für sehr große t-Werte, d. h. nach dem Stoß schließen, daß die Bahnkurve wieder eine diesmal andere Hyperbel wird, die aus dem für ein Zeitintervall Δt_2 entsprechenden Kraftgesetz $\frac{k_1}{r^2}$ folgt. Die tatsächliche Bahnkurve wird also eine Kurve sein, die eine einer Hyperbel immerhin noch ähnliche Form haben wird (vgl. Fig. 1) und sich für $t = 0$ bzw. $t \to \infty$, bzw. $\frac{k_1 + k_2}{r^2}$ und $\frac{k_1}{r^2}$ den beiden obigen Hyperbeln beliebig annähert.

Als weiteren Punkt wollen wir jetzt die Bestimmung der freien Weglänge betrachten. Wir gehen zunächst von den oben abgeleiteten Gleichungen (13a) aus und suchen den Wert von r zu bestimmen, der der größten Annäherung der Flüssigkeitsballen entspricht. Dieser Punkt der Bahnkurve ist der Umkehrpunkt bzw. der Scheitel S der hyperbelartigen Kurve. Die Koordinaten dieses Punktes sind leicht aus Gleichung (13a) bestimmbar. Man erhält zunächst für r:

$$\dot{r} = \sqrt{-\frac{2}{m}\left|k_1 + k_2 e^{-at}\right|\frac{1}{r} + \frac{2ak_2}{m}\int^{r}\frac{e^{-at}}{r}\,dt - \frac{K^2}{r^2} + \frac{2C_1}{m}} \tag{14}$$

Für den Scheitelpunkt der Kurve steht nun die Bahngeschwindigkeit senkrecht zum Fahrstrahl oder, mit anderen Worten, ist:

$$\dot{r} = 0. \tag{15}$$

Hiermit erhält man:

$$0 = \sqrt{-\frac{2}{m}\left|k_1 + k_2 e^{-at}\right|\frac{1}{r_0} + \frac{2ak_2}{m}\int^{r=r_0}\frac{e^{-at}}{r}\,dt - \frac{K^2}{r_0^2} + \frac{2C_1}{m}}, \tag{14a}$$

wo r_0 der Wert von r für den Scheitelpunkt ist. Man kann nun noch die Integrationskonstante C_1 bestimmen durch die Festsetzung, daß für $r \gg 0$, $\dot{r} = v_a$ (Anfangsgeschwindigkeit) wird, mit der die Teilchen beim Beginn der ganzen Bewegung sich aufeinander zu bewegen. Hiermit wird: $\frac{2C_1}{m} = v_a^2$, da auch $\frac{2ak_2}{m}\int^{r}\frac{e^{-at}}{r}\,dt \to 0$ für sehr große r, wie man sich leicht überlegen kann. Man erhält schließlich für r_0:

$$\frac{K}{r_0} = -\frac{1}{m}\frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})}{K} + \sqrt{\frac{2ak^2}{m}\int^{r=r_0}\frac{e^{-at}}{r}\,dt + \frac{1}{m^2}\frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})^2}{K^2} + v_a^2}. \tag{16}$$

Hierbei ist zu beachten, daß r_0 auch noch in dem Ausdruck $\int_{r=r_0}^{\cdot} \frac{e^{-at}}{r}\,dt$ enthalten ist. Wir können deshalb auch keine explizite Darstellung für r_0 geben. Da sich aber der Ausdruck $\int \frac{e^{-at}}{r}\,dt$ abschätzen läßt, so können wir trotzdem das Verhalten von r_0 bei veränderlichem t_0 gemäß unserem Kraftansatz [Gleichung (3)] studieren. Dazu bildet man:

$$\frac{d}{dt_0}\left(\frac{K}{r_0}\right) = +\frac{a k_2}{m K} e^{-at_0} + \frac{-\frac{a k_2}{m}\frac{e^{-at_0}}{r_0} + \frac{1}{m^2 K^2}(k_1 + k_2 e^{-at_0})(-a k_2 e^{-at_0})}{\sqrt{\frac{2 a k_2}{m}\int_{r=r_0}^{\cdot}\frac{e^{-at}}{r}\,dt + \frac{1}{m^2}\frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})^2}{K^2} + v_a^2}} \tag{17}$$

aus Gleichung (16) und erhält

$$0 < \frac{d}{dt_0}\left(\frac{K}{r_0}\right) = \frac{2 a k_2}{m K} e^{-at_0}\left| - \frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})}{m K} + \sqrt{\frac{2 a k_2}{m}\int \frac{e^{-at}}{r}\,dt + \frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})^2}{m^2 K^2} + v_a^2}\right|$$
$$\times \sqrt{\frac{2 a k_2}{m}\int \frac{e^{-at}}{r}\,dt + \frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})^2}{m^2 K^2} + v_a^2}.$$

Man übersieht leicht, daß dieser letzte Ausdruck immer positiv bleibt oder, mit anderen Worten, $\frac{1}{r_0}$ dauernd wächst bzw. r_0 abnimmt und sich für $t_0 \gg 0$ asymptotisch einem Grenzwert nähert, was physikalisch einleuchtend ist. Die Größe von K ergibt sich dann noch aus folgender Überlegung. Wir betrachten einen Punkt der Bahnkurve, der so weit von dem Flüssigkeitsteilchen, das als Kraftzentrum angenommen worden ist, entfernt ist, daß die ausgeübten Kräfte noch als verschwindend klein vernachlässigt werden können. Dann ergibt sich für K aus der Gleichung (12):

$$r^2\dot{\varphi} = K = b v_a\,, \tag{12a}$$

wo v_a die Geschwindigkeit ist, mit der sich das eine Flüssigkeitsteilchen dem anderen nähert (für den Fall, daß beide Flüssigkeitsteilchen sich bewegen gleich der Relativgeschwindigkeit der Teilchen), und b die Länge des Abstandes der Bahntangente in dem betrachteten Punkte von dem Ort des hier als fest angenommenen Teilchens. Für sehr große Entfernungen r wird die Bahn als geradlinig und mit der Bahntangente als zusammenfallend anzusehen sein. Hiermit ergibt sich dann für Gleichung (16):

$$\frac{v_a b}{r_0} = -\frac{1}{m}\frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})}{v_a b} + \sqrt{\frac{2 a k_2}{m}\int_{x}^{\cdot}\frac{e^{-at_0}}{x}\,dr + \frac{1}{m^2}\frac{(k_1 + k_2 e^{-at_0})^2}{v_a^2 b^2} + v_a^2}\,. \tag{18}$$

Mit diesem Wert von r_0 können wir nun leicht einen näherungsweisen Wert der freien Weglänge angeben. Für die freie Weglänge gilt nämlich mit der Stoßzahl pro Zeiteinheit Z und der mittleren Geschwindigkeit der Stoßpartner $\bar{v}$: (λ = freie Weglänge!):

$$Z = \frac{\bar{v}}{\lambda}\,; \qquad \lambda = \frac{v}{Z}\,, \tag{19}$$

d. h. so viele Male λ in $\bar{v}$ enthalten ist, so oft findet in der Zeiteinheit ein Zusammenstoß mit anderen Flüssigkeitsballen statt. Die Stoßzahl Z erhalten wir aber auch in bekannter Weise so: Wir benutzen das in der kinetischen Gastheorie übliche schematische Bild für die Zusammenstöße, d. h. wir denken uns zunächst nur einen Flüssigkeitsballen bewegt, dem wir dann als Größendurchmesser seinen Wirkungsradius (im Falle, daß zwischen den Teilchen keine Kräfte ausgeübt werden = 2 σ-Teilchendurchmesser) zuordnen. Die übrigen Teilchen werden dann als ruhend und punktförmig angesehen. Dann ergibt sich leicht: die Zahl der Zusammenstöße pro Zeiteinheit Z als die Zahl der Teilchen, die sich in dem von dem bewegten Teilchen in der Zeiteinheit durchquerten Raum befinden. Ist N die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit und $\bar{v}$ die Länge des pro Zeiteinheit beschriebenen Weges, so ist der durchquerte Raum gleich $\pi r_0^2 \bar{v}$, wenn wir den Wirkungsradius des bewegten Teilchens mit r_0 charakterisieren und also verabredungsgemäß immer dann von einem Zusammenstoß

reden wollen, wenn sich die Teilchen bis auf den Abstand r_0 einander nähern. Alle Teilchen, die sich weiter voneinander befinden, sollen sich nur so schwach beeinflussen, daß dieser Effekt vernachlässigt werden kann, eine Annahme, die nur das Ergebnis der hier angestellten Überlegungen rechtfertigen kann. Man erhält also schließlich hiermit für Z:

$$Z = N\pi r_0^2 \bar{v}\,. \tag{20}$$

Wenn alle Teilchen sich bewegen, so tritt an Stelle von $\bar{v}$ die über alle Teilchen gemittelte relative Geschwindigkeit. Mit der Annahme, daß alle Teilchen im Mittel dieselbe Geschwindigkeit besitzen, wird die relative Geschwindigkeit des einen Teilchens gegenüber dem anderen nur noch von einer Winkelfunktion abhängig. Eine Mittelung über alle Richtungen ergibt statt $\bar{v}$ den Faktor $\frac{4}{3}\cdot\bar{v}$. Nimmt man dagegen die Geschwindigkeit der Teilchen als verschieden und nach dem Maxwellschen Gesetz verteilt an, so ergibt die Rechnung statt $\bar{v}$ den Faktor $\sqrt{2}\cdot\bar{v}$. Hieraus folgt, daß wir unter der Voraussetzung einer etwas anderen Definition von λ berechtigt sind, den Zahlenfaktor willkürlich gleich 1 zu setzen, womit sich endlich für die freie Weglänge ergibt:

$$\lambda = \frac{1}{N r_0^2 \pi}\,. \tag{21}$$

Diese letzte Formel ist eigentlich nur gültig für verdünnte Gase. Im Rahmen der oben entwickelten Anschauungen wird es vorteilhaft sein, statt dieser Formel diejenige mit der van der Waalsschen Korrektion zu benutzen, die für höhere Gaskonzentrationen noch gültig bleibt. Unter Berücksichtigung dieser Korrektion erhalten wir dann für λ folgenden Ausdruck:

$$\lambda = \frac{1}{N r_0^2 \pi}\left|1 - \frac{5}{12} N\pi r_0^3\right|^{1)}. \tag{21a}$$

Nach den Anschauungen von W. Sutherland[2]) und M. Reinganum[3]) können wir in dem oben betrachteten Fall die Größe der freien Weglänge erhalten, wenn wir in der Gleichung (21a) r_0 durch die in Gleichung (18) angegebene Größe b ersetzen, d. h. es zeigt sich, daß der Effekt des Stoßes derselbe ist, wenn keine Abstoßungskräfte vorhanden sind, die Teilchen dagegen statt dem Radius σ oder bzw. dem Wirkungsradius r_0 den Halbmesser b besitzen. Damit erhält man:

$$\lambda = \frac{v_n^2\left|1 - \frac{5}{12} N\pi \frac{r_0^3}{v_n^3}\left|\frac{2}{m}(k_1 + k_2 e^{-at_0})\frac{1}{r_0} + \frac{2ak_2}{m}\int_{r=r_0}^{\infty}\frac{e^{-at}}{r}dt + v_n^2\right|^{3/2}\right|}{\pi N r_0^2\left|\frac{2}{m}(k_1 + k_2 e^{-at_0})\frac{1}{r_0} + \frac{2ak_2}{m}\int_{r=r_0}^{\infty}\frac{e^{-at}}{r}dt + v_n^2\right|}\,. \tag{22}$$

In dieser Formel [Gleichung (22)] wollen wir zunächst die Größe r_0 des Wirkungsradius als konstant ansehen, obgleich das nicht der Fall ist. Wir werden später sehen, welchen Einfluß die Änderung von r_0 auf das Resultat hat. Betrachtet man nun λ in Abhängigkeit von t_0, indem man eine Kurvenschar vom Typus der Bahnkurve (Fig. 1) für verschiedene t_0-Werte betrachtet, so ergibt sich folgendes Diagramm (Fig. 2). Eine derartige Betrachtung soll aber nun nichts anderes heißen, als daß wir den Stoßvorgang für verschiedene Zeitpunkte im Lebenslauf der Flüssigkeitsballen untersuchen. Nimmt man an, daß die von der Wandung in die Flüssigkeit hineindiffundierenden Ballen konstante Geschwindigkeit

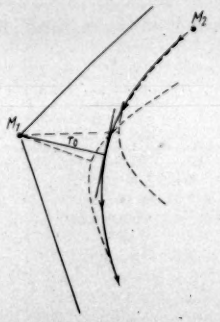

Fig. 1. Bahn der Flüssigkeitsteilchen unter dem Einfluß des oben angenommenen Kraftgesetzes.

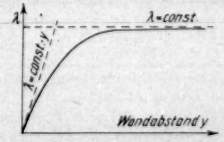

Fig. 2. Verteilung der Mischungsweglänge als Funktion des Wandabstandes.

1) Vgl. z. B. Boltzmann, l. c., Bd. II, S. 158.
2) Phil. Mag. (5) **36**, 507, 1893.
3) Physik. Zeitschr. **2**, 242, 1900/01.

senkrecht zur Wandung überwiegend besitzen, so kann man in erster Näherung t_0 proportional dem Abstand von der Wand setzen (Achse senkrecht zur Wandung = y-Achse), und man erhält:

$$\lambda = \frac{v_a^2 \left| 1 - \frac{5}{12} N\pi \frac{r_0^3}{v_a^3} \left[\frac{2}{m} (k_1 + k_2 e^{-Ay}) \frac{1}{r_0} + \frac{2ak_2}{m} \int \frac{e^{-at}}{r} dt + v_a^2 \right]^{3/2} \right|}{\pi N r_0^2 \left| \frac{2}{m} (k_1 + k_2 e^{-Ay}) \frac{1}{r_0} + \frac{2ak_2}{m} \int \frac{e^{-at}}{r} dt + v_a^2 \right|}. \tag{23}$$

Das Ergebnis der ganzen Betrachtung ist also eine Beziehung zwischen der freien Weglänge und dem Wandabstand. Nun sind in der oben erwähnten zusammenfassenden Arbeit von L. Prandtl verschiedene solche Beziehungen für die Mischungsweglänge diskutiert worden. Es zeigt sich, daß in der Nähe der Wandung die Beziehung:

$$l = \text{konst. } y \tag{24}$$

in guter Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung steht, während im Innern der Strömung z. B. der Mitte einer Rohrströmung, gefolgert werden kann, daß:

$$l = \text{konst.} \tag{25}$$

gilt. (Diese Beziehung folgt aus dem Prandtl-Kármánschen Ansatz für die Mischungsweglängenverteilung bei einer Rohrströmung: $l = r_1 f(y/r_1)$ für $y = \sim r_1$[1]). Betrachten wir jetzt unsern oben erhaltenen Ausdruck [Gleichung (23)], so ergibt sich aus ihm für geringen Wandabstand (Entwicklung für kleine y):

$$\lambda_{y \to 0} = \frac{v_a^2 \left| 1 - \frac{5}{12} N\pi \frac{r_0^3}{v_a^3} \left[\frac{2}{m} (k_1 + k_2 - A k_2 y) \frac{1}{r_0} + v_a^2 \right]^{3/2} \right|}{\pi N r_0^2 \left| \frac{2}{m} (k_1 + k_2 - A k_2 y) \frac{1}{r_0} + v_a^2 \right|} = P_1 + P_2 y, \tag{24a}$$

wo P_1 und P_2 Konstanten[2]). In der gleichen Weise erhält man für die Strömung in der Rohrmitte, d. h. für große y-Werte in erster Näherung:

$$\lambda_{y \gg} = \frac{v_a^2 \left| 1 - \frac{5}{12} N\pi \frac{r_0^3}{v_a^3} \left| \frac{2}{m} \frac{k_1}{r_0} + v_a^2 \right|^{3/2} \right|}{\pi N r_0^2 \left| \frac{2}{m} \frac{k_1}{r_0} + v_a^2 \right|} = \text{konst.} \tag{25a}$$

In der Fig. 2 sind die Abhängigkeiten aller drei Beziehungen [Gleichung (23, 24, 25)] eingetragen, und man sieht die qualitative Übereinstimmung. Dabei ist bereits berücksichtigt worden, daß unsere Beziehung nicht mehr gültig ist in allernächster Nähe der Wandung, wo die Rauhigkeit der Wandung eine maßgebende Rolle spielt. Es ist daher verständlich, daß unsere Beziehung nicht mit $l = 0$ für $y = 0$ beginnen kann, wie die von Prandtl angegebene Gleichung (24), sondern mit einem endlichen Wert von l für $y = 0$[1]). Schließlich soll noch bemerkt werden, daß die Übereinstimmung mit den anderen Annahmen einer Mischungsweglängenverteilung noch verbessert werden kann. Wir haben ja bis zum Schluß von der zeitlichen Abhängigkeit unserer Kraftfunktion keinen einschneidenden Gebrauch gemacht, so daß nichts im Wege steht, diese zeitliche Abhängigkeit auch in anderer Form anzunehmen, solange man im Einklang mit den oben entwickelten Anschauungen über die Entstehung und das Vergehen der Flüssigkeitsballen bleibt. Es soll hier vorläufig genügen, auf die bereits mit diesen einfachen Mitteln erzielte Übereinstimmung hinzuweisen. Am Schluß des folgenden Abschnitts sollen die hier abgeleiteten Ergebnisse noch verfeinert werden. In der Tat scheint die Bedeutung der angestellten

1) r_1 = Rohrhalbmesser.

2) $$P_1 = \frac{v_a^2}{\pi N r_0^2 \left[\frac{2}{m} \frac{1}{r_0} (k_1 + k_2) + v_a^2 \right]} - \frac{5}{12} \frac{r_0}{v_a} \left[\frac{2}{m} \frac{1}{r_0} (k_1 + k_2) + v_a^2 \right]^{1/2},$$

$$P_2 = \frac{2 v_a^2 A k_2}{m \pi N r_0^2 \left[\frac{2}{m} \frac{1}{r_0} (k_1 + k_2) + v_a^2 \right]^2} + \frac{5}{12} \frac{A k_2}{v_a m \left[\frac{2}{m} \frac{1}{r_0} (k_1 + k_2) + v_a^2 \right]^{1/2}}.$$

1) Das heißt, es wird $\lambda = 0$ für $y = 0$ in unserer Formel (24a), wenn man setzt:

$$k_1 = \frac{m r_0}{2} \left\{ \frac{12 v_a^3}{5 N \pi r_0^3} \right\}^{2/3} - \frac{m r_0}{2} v_a^2 - k_2,$$

womit $P_1 = 0$.

Überlegung mehr darin zu liegen, daß es nicht notwendig ist, bei der Annahme einer Mischungsweglängenverteilung stehenzubleiben, sondern daß man das anschauliche Bild noch weiter vertiefen kann bis zu dem einzelnen Elementarprozeß bei den Flüssigkeitsballen.

5. Geschwindigkeitsverteilungsgesetz[1])

Um nun einige Aussagen über das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz, d. h. das Verteilungsgesetz der verschiedenen Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsballen im Sinne der kinetischen Gastheorie, unter den oben angenommenen Bedingungen zu gewinnen, müssen wir zunächst die Zustandsgleichung für unsere Flüssigkeitsteilchen ableiten. Man kann sich auch hier den Überlegungen von Reinganum[2]) anschließen, denen wir bei den folgenden Betrachtungen im allgemeinen folgen. Dabei benutzen wir den von Clausius aufgestellten Begriff des „Virials" der Kräfte. Sind nämlich u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten eines Massenpunktes und X, Y, Z die Komponenten der Kräfte, welche auf den Massenpunkt wirken, so gilt:

$$m\frac{du}{dt} = X; \quad m\frac{dv}{dt} = Y; \quad m\frac{dw}{dt} = Z. \tag{26}$$

Eine leichte Umformung ergibt dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mxu) &= Xx + mu^2; \\ \frac{d}{dt}(myv) &= Yy + mv^2; \\ \frac{d}{dt}(mzw) &= Zz + mw^2. \end{aligned}\right| \tag{27}$$

Unsere Betrachtungen vereinfachen sich nun gegenüber denen von Reinganum dadurch, daß hier gemäß dem obigen Ansatz nur Abstoßungskräfte vorhanden sind. Eine Aufteilung des Virials der inneren Kräfte in das Virial der Anziehungs- und das der Abstoßungskräfte fällt hier fort. Das Virial der inneren Kräfte besteht in unseren Ableitungen nur aus dem der Abstoßungskräfte. Nimmt man zu diesem Ausdruck [Gleichung (31)] noch das Virial der Druckkräfte hinzu, so ergibt sich mit n = der Anzahl der Teilchen im Volumen v:

$$nmc^2 - 3pv + \sum r\frac{k_1 + k_2 e^{-\alpha r}}{r^2} = 0. \tag{32}$$

Wir machen auch hier die Annahme, daß immer nur zwei Teilchen in Wechselwirkung miteinander treten sollen und daß ein Zusammenwirken von drei und mehr Teilchen bereits unendlich unwahrscheinlich sei gegenüber der Wechselwirkung von zwei Teilchen. Als äußere Kräfte sollen ferner nur, wie oben angedeutet, Druckkräfte wirken. Für den weiteren Fortgang der Betrachtung müssen wir nun die Anzahl der Teilchen berechnen, die unter den obigen Voraussetzungen überhaupt zum Stoß kommen können oder, mit anderen Worten, da wir uns auf Zweierstöße beschränken, die Zahl der Teilchenpaare,

Unter der Voraussetzung, daß die unter dem Einfluß der Kräfte erlangten Geschwindigkeiten beständig zwischen endlichen Grenzen bleiben, kann man Gleichung (27) integrieren und erhält damit für beliebig großes Zeitintervall ($\tau \to \infty$)[3]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{\tau}(u_\tau x_\tau - u_0 x_0) &= m\overline{u^2} + \overline{Xx}; \\ \frac{m}{\tau}(v_\tau y_\tau - v_0 y_0) &= m\overline{v^2} + \overline{Yy}; \\ \frac{m}{\tau}(w_\tau z_\tau - w_0 z_0) &= m\overline{w^2} + \overline{Zz}, \end{aligned}\right| \tag{28}$$

woraus für beliebig viele Massenpunkte folgt:

$$\sum mc^2 + \sum(\overline{Xx} + \overline{Yy} + \overline{Zz}) = 0 \tag{29}$$

(wegen $\tau \to \infty$).

Den Ausdruck $\sum(Xx + Yy + Zz)$ nennt man nach Clausius das Virial der Kräfte, das mit der kinetischen Energie in dem oben angegebenen einfachen Zusammenhang steht.

Wir benutzen die Virialgleichung nun, um zur Aufstellung der Zustandsgleichung zu gelangen. In unserem Falle lauten die Komponenten der wirkenden Kräfte auf die Flüssigkeitsteilchen:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{k_1 + k_2 e^{-\alpha r}}{r^2}\frac{x}{r}; \quad Y = \frac{k_1 + k_2 e^{-\alpha r}}{r^2}\frac{y}{r}; \\ Z &= \frac{k_1 + k_2 e^{-\alpha r}}{r^2}\frac{z}{r}. \end{aligned}\right| \tag{30}$$

Hiermit ergibt sich für die Virialgleichung, wobei wir noch die entsprechenden Mittelwerte zu bilden haben, um das Virial der inneren Kräfte zu erhalten:

$$\sum(Xx + Yy + Zz) = \sum r\frac{k_1 + k_2 e^{-\alpha r}}{r^2}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}\right) = \sum r\frac{k_1 + k_2 e^{-\alpha r}}{r}. \tag{31}$$

1) Vgl. hierzu Anm. 1 auf S. 1151, betreffs des Unterschiedes mit dem Geschwindigkeitsprofil einer Rohrströmung.

2) Ann. d. Phys. **6**, 533 ff., 1901.

3) Die gestrichenen Größen, z. B. $\overline{Xx}$, $\overline{Yy}$, . . ., bedeuten zeitliche Mittelwerte.

die solche Stöße austauschen. Denkt man sich um jedes Teilchen zwei Kugelflächen mit den Radien r und $r+dr$ gelegt, so ist das Volumen des Zwischenraumes der beiden Flächen $4\pi r^2 dr$. Für n-Teilchen beträgt dann der gesamte Zwischenraum zwischen je zwei solcher Flächen: $4\pi r^2 n dr$. Ist v der Inhalt des Gesamtraumes, so ist $4\pi r^2 n dr/v$ die Wahrscheinlichkeit, daß der Mittelpunkt irgendeines Teilchens in einem solchen Zwischenraum liegt. Die Gesamtzahl aller Teilchen, die in diesen Zwischenräumen liegen, ist dann: $n\frac{4\pi n r^2 dr}{v} = 4\pi\frac{n^2 r^2}{v}dr$. Gehen wir von dieser Zahl zu der Zahl der Teilchenpaare über, bei denen das eine Teilchen in einem Mittelpunkt und das andere in dem dazugehörigen Zwischenraum sich befindet, so findet man unmittelbar bei Beschränkung auf Zweierstöße: $\frac{2\pi n^2 r^2 dr}{v}$, da die Anzahl der in den Zwischenräumen gelegenen Teilchen gleich groß ist wie die Anzahl der Teilchen in den dazugehörigen Mittelpunkten. Hiermit ergibt sich schließlich für die Zahl der Teilchenpaare:

$$dn = \frac{2\pi n^2 r^2}{v} e^{-\frac{3\chi(r)}{m\bar{c}^2}} dr , \qquad (33)$$

wobei $\chi(r)$ die Arbeit angibt, die geleistet wird, wenn ein Teilchen aus dem Unendlichen bis auf den Abstand r einem anderen genähert wird. Wir haben ferner bei der Beziehung [Gleichung (33)] von dem Maxwell-Boltzmannschen Gesetz Gebrauch gemacht. Wie Boltzmann gezeigt hat, gilt dies Verteilungsgesetz auch für Kräfte, die nur über sehr kleine Räume wirken, wie wir angenommen haben, so daß die Gültigkeit des Gesetzes auch auf „Molekularkräfte" ausgedehnt werden kann. Außerdem zeigte Boltzmann, daß die Dichte des Gases beeinflußt wird durch vorhandene äußere Kräfte[1]). Bei diesen Betrachtungen und Erweiterungen wird nur vorausgesetzt, daß die Dichte des Gases sich so verteilen muß, daß aus jedem Volumenelement in der Zeiteinheit ebenso viele Teilchen von einer bestimmten Geschwindigkeit ausfliegen müssen, wie Teilchen von derselben Geschwindigkeit in das Volumenelement eintreten. Diese Annahme scheint auch innerhalb unserer Vorstellungen noch plausibel und möglich, so daß hier davon Gebrauch gemacht wird.

Hiermit können wir jetzt aus Gleichung (33) das Virial der Abstoßungskräfte und damit das Virial der inneren Kräfte bilden:

$$\sum r\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2} + 2\pi\frac{n^2}{v}\int_{r_0}^{\infty} r^3\frac{(k_1+k_2e^{-at})}{r^2}e^{-\frac{3\chi(r)}{m\bar{c}^2}}dr . \qquad (34)$$

Nach dem, was oben über die Wirksamkeit der Abstoßungskräfte gesagt wurde, ist die Integration von $r=\infty$ bis $r=r_0$, das ist der Abstand, bis auf den sich die Teilchen einander nähern, zu erstrecken. Für $\chi(r)$ ergibt sich mit der oben gegebenen Erklärung:

$$\chi(r) = \int_r^{\infty}\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2}dr . \qquad (35)$$

Und man erhält schließlich:

$$\sum r\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2} = \frac{2\pi n^2}{v}\int_{r_0}^{\infty} r^3\frac{(k_1+k_2e^{-at})}{r^2}e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty}\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2}dr}dr . \qquad (36)$$

Führt man diesen Ausdruck in die oben aufgestellte Virialgleichung ein [Gleichung (32)], so erhalten wir als Zustandsgleichung für unser Teilchengas:

$$nm\bar{c}^2 - 3pv + \frac{2\pi n^2}{v}\int_{r_0}^{\infty} r^3\frac{(k_1+k_2e^{-at})}{r^2}e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty}\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2}dr}dr = 0 . \qquad (37)$$

Von dieser Zustandsgleichung kommt man durch eine einfache Umformung, wie Reinganum gezeigt hat, unmittelbar zu der van der Waalsschen Zustandsgleichung mit der Änderung, daß die van der Waalsschen Kohäsionskräfte hier nicht vorhanden, d. h. gleich Null gesetzt sind. Setzt

1) L. Boltzmann, l. c.; G. Jäger, l. c., Kapitel 2 und 3.

man nämlich: $\frac{n m \bar{c}^2}{3} = RT$ im Einklang mit der bekannten Elementargleichung der kinetischen Gastheorie, so erhält man statt Gleichung (37):

$$p \cdot v = RT \left| 1 + \frac{2\pi n}{m\bar{c}^2 v} \int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{(k_1 + k_2 e^{-at})}{r^2} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} dr} dr \right|, \tag{38}$$

womit der Zusammenhang mit der van der Waalsschen Zustandsgleichung klar ist. Die van der Waalssche Konstante b ergibt sich hier zu:

$$b = \frac{2\pi n}{m\bar{c}^2} \int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{(k_1 + k_2 e^{-at})}{r^2} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} dr} dr.$$

Den Gleichungen (21a) und (36) liegen dieselben Voraussetzungen zugrunde.

Führen wir jetzt noch die Größe $N = \frac{n}{v}$ Anzahl der Teilchen in der Volumeneinheit in die obige Gleichung (36) ein, so kann man die Zustandsgleichung auch in der Form schreiben (mit $v = l$):

$$p = \frac{N m \bar{c}^2}{3} + \frac{2\pi N^2}{3} \int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{(k_1 + k_2 e^{-at})}{r^2} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} dr} dr. \tag{38a}$$

Vergleicht man schließlich noch die letzte Gleichung (38a) mit der bekannten Elementargleichung der kinetischen Gastheorie: $p = N m \frac{\bar{c}^2}{3}$, so kann man unmittelbar schließen, daß für N (bzw. Dichte ϱ) gilt:

$$N(t) = N \left| 1 + \frac{2\pi N}{3m\bar{c}^2} \int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} dr} dr \right|. \tag{39}$$

Diese Beziehung zwischen der Teilchenzahl N und der Zeit t setzt uns nun in den Stand, das Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsgesetz für unseren Fall zu erweitern. Denn es ist ohne weiteres plausibel, wenn man sagt, daß im Falle unserer Teilchen das Maxwellsche Verteilungsgesetz gültig bleibt mit der Änderung, daß an die Stelle eines konstanten N jetzt $N(t)$, die Teilchenzahl als Funktion der Zeit gesetzt wird. Auf diese Weise ergibt sich für das Verteilungsgesetz in unserem Falle (α = wahrscheinlichste Geschwindigkeit), $\alpha = \frac{2}{3}\bar{c}^2$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N}{\alpha\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{3}{\bar{c}^2}\chi(r) - \frac{c^2}{\alpha^2}} dc \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{N}{\bar{c}} \left| 1 + \frac{2\pi N}{3m\bar{c}^2} \int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} dr} dr \right| \int e^{-\frac{3}{2\bar{c}^2}(c^2 + 2\chi(r))} \cdot dc, \end{aligned}\right| \tag{40}$$

wo $\chi(r)$ das Potential der äußeren Kräfte ist, falls welche vorhanden sind. In dem Fall der Druckkräfte wird:

$$\chi(r) = \text{konst.} \cdot r. \tag{41}$$

Die letzte Gleichung (40) besagt aber, daß, wenn wir uns die Strömung in Schichten parallel zur Wand eingeteilt denken, die Maxwell-Verteilung für die einzelnen Schichten erhalten bleibt, nur die gesamte Verteilungskurve nimmt dann mit wachsendem Wandabstand bzw. wachsender Zeit gemäß dem Faktor

$$\int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r^2} dr} dr = \int_{r_0}^{\infty} r (k_1 + k_2 e^{-at}) e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\left[\frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{r} + a k_2 \int_t^0 \frac{e^{-at}}{r} dt\right]} dr$$

ab und bleibt schließlich nach Abklingen desselben konstant.

Ehe wir nun das oben angegebene Verteilungsgesetz noch auf die Bestimmung der freien Weglänge anwenden, wird es gut sein, hier noch einige Bemerkungen einzuschalten.

Was zunächst die Berechnung des Virials der Abstoßungskräfte anbetrifft [Gleichung (36)], so läßt sich zwar nicht mit Bestimmtheit sagen, aber es scheint immerhin zweifelhaft, ob nach der Auswertung des Integrals der Wert desselben für $r = \infty$ noch endlich bleibt. Sollte dieser Fall tatsächlich nicht eintreten, so ist man gezwungen, in dem ursprünglich angenommenen Abstoßungsgesetz die Potenz des Abstandes r zu ändern und z. B., wie es bereits Maxwell aus anderen Gründen tat, eine Kraftwirkung umgekehrt proportional der 5. Potenz des Abstandes anzunehmen, jedenfalls aber wohl eine Potenz, die größer als 3 ist. An der gesamten Ableitung und den übrigen Betrachtungen würde sich aber bis auf die rechnerische Durchführung nichts ändern.

Ferner mag auch die bei den hier angestellten Überlegungen getroffene Annahme, daß die einzelnen Flüssigkeitsballen während ihrer Bewegung immer konstante Maße behalten (m = konst.), bedenklich erscheinen. Ein erster Schritt der Annäherung würde wohl die Annahme von $m(r)$ als Funktion des Abstandes sein (d. h. eigentlich wäre als Variable der Abstand von der Wandung zu nehmen). Unter der Voraussetzung einer solchen stetigen Massenänderung der Teilchen mag hier der Hinweis genügen, daß die oben angestellten Betrachtungen es ohne weiteres zulassen, eine solche Massenfunktion einzuführen. Nur die Durchführung der Rechnung und die Ausführung der Integration bei der Bestimmung der Viriale dürften sich entsprechend komplizierter gestalten.

Wir kommen nun zu der Bestimmung der freien Weglänge auf Grund unseres neuen Verteilungsgesetzes. Dazu gehen wir auf die Gleichung (21) zurück, deren Ableitung, wie oben erwähnt wurde, auch jetzt richtig bleibt. Setzt man in diese Gleichung für N und r_0 die oben bestimmten Werte ein [Gleichung (18) und (39)], so ergibt sich unmittelbar für die freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{1}{N r_0^2 \pi} - \frac{5}{12} r_0 = \frac{\dfrac{1}{v_a^2 b^2}\left|-\dfrac{1}{m}(k_1+k_2e^{-at_0})\dfrac{1}{v_a b}+\sqrt{\dfrac{2ak_2}{m}\int\dfrac{e^{-at}}{r}dt+v_a^2+\dfrac{1}{m^2}\dfrac{(k_1+k_2e^{-at_0})^2}{v_a^2b^2}}\right|^2}{\pi N\left|1+\dfrac{2\pi N}{3m\bar{c}^2}\int_{r_0}^{\infty} r^3\dfrac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2}e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^\infty\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^2}dr}dr\right|} - \frac{5}{12} v_a b \left|-\frac{1}{m}(k_1+k_2e^{-at_0})\frac{1}{v_a b}+\sqrt{\frac{2ak_2}{m}\int\frac{e^{-at}}{r}dt+v_a^2+\frac{1}{m^2}\frac{(k_1+k_2e^{-at_0})^2}{v_a^2b^2}}\right|. \tag{42}$$

Um diese Gleichung noch etwas zu veranschaulichen, wollen wir hier als Beispiel eine genäherte Auswertung der Integrale geben. Nimmt man z. B. als elementares Kraftwirkungsgesetz statt Gleichung (3) das Folgende an:

$$K = \frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^5}, \tag{3a}$$

so nimmt die Kraftwirkung mit wachsendem Abstand r so stark ab, daß man die Integration in guter Näherung statt von r_0 bis ∞ einfach von r_0 bis r_a erstrecken kann, indem man annimmt, daß bis zu diesem Wert von r die wesentliche Kraftwirkung erschöpft ist. Unter der Voraussetzung, daß r_0 und r_a nicht allzuweit voneinander verschieden sind, kann man den Mittelwertsatz anwenden und erhält mit dem Mittelwert r_m:

$$\int_{r_0}^{r_a} r^3\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^5}e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{r_a}\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^5}dr}dr = -r_m^3\frac{m\bar{c}^2}{3}e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_{r_0}^{r_a}\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^5}dr}, \tag{43}$$

wo $r_0 \leqq r_m \leqq r_a$ und $t = t_a$ für $r = r_a$, sowie $t = t_0$ für $r = r_0$.

Außerdem läßt sich der Integralausdruck in Gleichung (36) nach Boltzmann folgendermaßen auswerten, wenn man r_m als konstant vor das Integralzeichen setzt:

$$\int_{r_0}^{r_a} r^3\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^5}e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}\int_r^{r_a}\frac{k_1+k_2e^{-at}}{r^5}dr}dr = \int_{r_0}^{r_a} e^{-\frac{3}{m\bar{c}^2}y}dy\cdot r_m^3. \tag{44}$$

Dabei ist:

$$y = \int_{r}^{r_a} \frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{\rho^5}\, d\rho\,, \tag{45}$$

und man hat die neuen Grenzen: $r = r_a$ für $y = 0$ und $y = y_0$ für $r = r_0$.

Mit dieser Auswertung der Integrale ergeben sich schließlich für das Verteilungsgesetz und für die freie Weglänge folgende schematisch geschriebene Gleichungen:

$$\frac{N}{\alpha\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{3}{c^2}\chi(r) - \frac{c^2}{\alpha^2}}\, dc = \left| A - Be^{-[C + De^{-at_0} + Ee^{-at_0}]} \right| \int e^{-\frac{3}{2c^2}(c^2 + 2\chi(r))}\, dc\,, \tag{46}$$

$$\lambda = \frac{1}{\left| A' - B' e^{-[C + De^{-at_0} + Ee^{-at_0}]} \right|} \frac{r_0^2}{N} - \frac{5}{12} r_0\,, \tag{47}$$

wo die Größen $A, B, C, D, A', B', C', E', \ldots$ positiv und konstant[1]).

In dieser Form sagen aber die beiden Gleichungen (46) und (47) nicht anderes aus als das, was die Diskussion der Gleichungen (23) und (40) bereits ergeben hatte, besonders wenn man wieder statt t_a und t_0 den Wandabstand y einführt (vgl. S. 119). Da eine weitere Diskussion der obigen Gleichungen (46) und (47) nichts Neues bringt, soll dieser Hinweis genügen.

Dagegen ist es natürlich von Interesse, hier zu erörtern, welche Folgerungen sich aus den hier angestellten Betrachtungen für die eingangs definierte Fragestellung der Druckabhängigkeit des Geschwindigkeitsprofiles gewinnen lassen. Zunächst ist leicht aus den Gleichungen (23) und (42) zu ersehen, daß außer zwischen dem Zusammenhange der Teilchenzahl N bzw. der Dichte ϱ und dem Druck noch der Exponent a eine Funktion des Druckes sein wird. In Ermangelung irgendwelcher Kenntnisse nehmen wir hier als ersten Schritt der Näherung an:

$$a = \alpha_1 p\,, \tag{48}$$

wo α_1 eine Konstante. Betrachtet man unter dieser Annahme die Druckabhängigkeit der Formeln (23) und (42), so ergibt sich in schematischer Schreibweise:

$$\lambda = \frac{Q_1}{Q_2 + Q_3 e^{-apt_0} + Q_4 \int \frac{e^{-apt}}{r}\, dt} - Q_5 \left| Q_2 + Q_3 e^{-apt_0} + Q_4 \int \frac{e^{-apt}}{r}\, dt \right|^{1/2}, \tag{49}$$

bzw.

$$\lambda = \frac{1}{N r_0^2 \pi} - \frac{5}{12} r_0 = \frac{\left| \sqrt{Q_1' + Q_2' e^{-apt_0} + Q_3 \int \frac{e^{-apt}}{r}\, dt} - Q_4' - Q_5' e^{-apt_0} \right|^2}{\left| Q_6' + Q_7' \int_{r_0}^{\infty} r^3 \frac{k_1 + k_2 e^{-apt}}{r^2} e^{-\frac{3}{m c^2} \int_r^{\infty} \frac{k_1 + k_2 e^{-apt}}{r^5} dr} dr \right|} - \frac{5}{12} r_0\,, \tag{50}$$

wo die Größen $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ bzw. $Q_1', Q_2', Q_3' \ldots$ wieder konstante positive Größen und r_0 der Klammerausdruck im Zähler von Gleichung (50).

Man erkennt aus den Formeln (49) und (50), daß sich bei sinkendem Druck dieselben Effekte aus ihnen folgern lassen, wie wir sie oben erwähnten, d. h. mit sinkendem Druck ergibt sich wegen des kleineren Exponenten a ein langsameres Wachsen der Größe der freien Mischungsweglänge mit wachsendem Wandabstand und

[1]) Dabei ergibt sich r_0 zu:

$$r_0 = \frac{\sqrt{b^2 v_a^2}}{\left[\frac{ak_2}{m} \int \frac{e^{-at}}{r^4}\, dt + 2v_a^2\right]_{r=r_0}} + \frac{\sqrt{b^4 v_a^4 + \frac{1}{2m}(k_1 + k_2 e^{-at}) \left(\frac{ak_2}{m} \int \frac{e^{-at}}{r^4}\, dt + 2v_a^2\right)}}{\left[\frac{ak_2}{m} \int \frac{e^{-at}}{r^4}\, dt + 2v_a^2\right]_{r=r_0}}\,, \tag{18b}$$

indem man an Stelle von Gleichung (13a) zu schreiben hat:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2) = -\frac{k_1 + k_2 e^{-at}}{4r^4} + \frac{ak_2}{4} \int \frac{e^{-at}}{r^4}\, dt + v_a^2 \cdot \frac{m}{2}\,. \tag{13b}$$

ebenso ein langsameres Abnehmen der Maxwell-Verteilung bei Fortschreiten von Schicht zu Schicht. Definiert man im Zusammenhange mit diesen Abhängigkeiten als Grenzschichtdicke denjenigen Bereich, in dem die wesentlichen Änderungen der Größe der freien Mischungsweglänge bzw. der Größe der Maxwellschen Verteilungskurve stattfinden, so kann man folgende

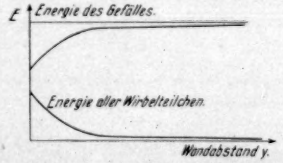

Fig. 3. Energieverteilung der Teilchen über den Flüssigkeitsquerschnitt.

Abhängigkeit der Grenzschichtdicke vom Druck folgern. Dazu definieren wir die Grenzschichtdicke als den Abstand des Punktes von der Rohrwand, der sich als Schnittpunkt der Tangenten an die Weglängenverteilungskurve [d. i. die graphische Darstellung der Gleichung (23) bzw. (42)] an der Rohrwand, d. h. für den Wandabstand Null, bzw. in dem Punkte des Rohrabstandes, wo die zeitliche Abhängigkeit des elementaren Wirkungsgesetzes [Gleichung (1)] abgeklungen ist (mit andern Worten der Punkt, von dem ab keine wesentlichen Änderungen der Mischungs-

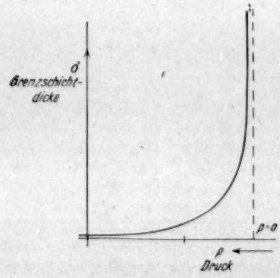

Fig. 4. Abhängigkeit der Grenzschichtdicke vom Druck.

weglängengröße eintreten)[1]), ergibt, so erhält man auf graphischem Wege die folgende Kurve (Fig. 4), die das Wachsen der Grenzschichtdicke mit sinkendem Druck zeigt. Eine ähnliche Abhängigkeit läßt sich auch aus der Änderung der Maxwellschen Verteilungskurve folgern, wenn man eine entsprechende Definition der Grenzschichtdicke zugrunde legt.

Wir erhalten also das wichtige Ergebnis, daß aus den obigen Betrachtungen bereits gefolgert werden kann, daß mit sinkendem Druck die Grenzschichtdicke zunimmt oder, mit anderen Worten, das Geschwindigkeitsprofil in der Nähe der Wandung einen weniger steilen Anstieg besitzt und mithin sich von der turbulenten der laminaren Form mehr und mehr annähert. Wir werden am Schluß des zweiten Teiles dieser Arbeit auf dieses Ergebnis zurückkommen und zeigen, wie weit die hier gefundene theoretische Abhängigkeit mit der experimentell bestimmten übereinstimmt.

Zum Abschluß dieses Teiles wollen wir noch kurz das oben Gesagte zusammenfassen. Wir haben gezeigt, daß die phänomenologische Darstellung der turbulenten Strömungsvorgänge, die sich nach L. Prandtl auf gewisse Mischungsweglängenverteilungen zurückführen, noch weiter verfolgen lassen und daß man, von der Annahme eines elementaren Kraftgesetzes ausgehend, diese von Prandtl angenommene Mischungsweglängenverteilung wiedergeben kann. Da bei den ganzen Betrachtungen von diesem Elementargesetz erst bei der Durchführung der Rechnung Gebrauch gemacht wird, hat man es in der Hand, durch geeignete Wahl desselben in Übereinstimmung mit den experimentellen Erfahrungen zu bleiben. Insoweit besitzen diese Überlegungen keine unmittelbare Beweiskraft für die Existenz einer solchen Turbulenzstatistik, sondern bilden nur ein anschauliches Bild für die Erklärung dieser Erscheinung. Für einen exakteren Beweis auf der obigen anschaulichen Grundlage wäre es notwendig, aus dem angenommenen Kraftgesetz weitere Eigenschaften der turbulenten Strömungsvorgänge zu folgern, die sich dann wieder mit dem Experiment vergleichen lassen. Eine solche Möglichkeit bietet nun das oben besprochene Ergebnis der Abhängigkeit der Grenzschichtdicke vom Druck, über dessen Übereinstimmung wir noch im zweiten Teil berichten werden.

Für eine rein theoretische Beweisführung ist dieser anschauliche Weg dagegen nicht geeignet. Dazu bedarf es viel tiefergehenderer grundsätzlicherer statistischer Untersuchungen, wie sie von anderer Seite[1]) bereits mit Erfolg versucht werden. Aber auch wenn diese anderen Wege vollständig durchgeführt sein werden, so kann man immer noch unsere Überlegungen diesen Betrachtungen angleichen (z. B. durch geeignete

1) Ins Analytische übertragen, ergibt sich für die Grenzschichtdicke:

$$\delta = \lambda_{0 \to \infty} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dt_0}\right)_{t_0 \to 0}} .$$

1) H. Gebelein, l. c.; G. I. Taylor, l. c.

Wahl eines Kraftgesetzes), und sie werden dann gerade wegen ihrer Anschaulichkeit noch neben den anderen ihren Wert behalten.

Schließlich wollen wir noch einmal auf die Bemerkungen betreffs der Frage der Punktwirbel bzw. der Wirbelfäden mit verschiedener Achsenlage eingehen (s. S. 114). Nach allem, was oben gesagt worden ist über die elementaren Kraftfelder, kann man nun leicht auch für den Fall von Wirbelfäden gültige Kraftbeziehungen angeben. An Stelle von den Gleichungen (1–3) haben wir nämlich dem Biot-Savartschen Gesetz ähnliche Formeln einzuführen, die etwa so aussehen:

$$\left.\begin{aligned} K_r &= \frac{\partial}{\partial r}\left| K(l)\,\frac{(ds\cdot r)}{r^3}\right|, \\ \text{wo}\qquad (ds\cdot r) &= ds\cdot r\cdot\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Es steht nichts im Wege, von diesen Formeln ausgehend, unter gewissen Annahmen der Wirbelfadenform (z. B. geradlinige Wirbelfäden) die obigen Betrachtungen durchzuführen, wobei die Beobachtungen über das überwiegende Auftreten gewisser Wirbelachsenrichtungen diese Einschränkungen begünstigen. Wir begnügen uns mit diesem Hinweis.

Als letzter Punkt steht endlich noch die Frage nach der Nebenbedingung zur Erörterung. Darüber kann kurz folgendes gesagt werden, wobei wir die eingehende Diskussion den oben erwähnten allgemeineren theoretischen Erörterungen überlassen. Wegen der Abhängigkeit der Teilchenzahl N von der Zeit t_a und t_0 bzw. dem Wandabstand y ist die Gesamtenergie natürlich nicht konstant. Nur in wandparallelen Schichten kann wieder Energiekonstanz im Mittel angenommen werden. Berücksichtigt man ferner die über den Strömungsquerschnitt konstante, von dem Strömungsgefälle herrührende Energie, so ergibt sich die Energieverteilung über den Querschnitt als Differenz dieser konstanten Gefällenergie und der gaskinetischen Energie, wenn man, wie am Anfange dieser Betrachtungen vorausgesetzt wurde, annimmt, daß die gaskinetische Energie der Gefällenergie entnommen wird. Hiermit ergibt sich dann die in Fig. 3 schematisch gezeichnete Energieverteilung in Abhängigkeit vom Wandabstand, die ohne weiteres plausibel erscheint.

Braunschweig.

(Eingegangen 18. Mai 1937)

Über den Bleiglanzlichtdetektor

Von Fr. Fischer, B. Gudden und M. Treu

I. Die Fragestellung und ihre Vorgeschichte
II. Voruntersuchungen
Verwendete Mineralien
Beeinflussung der Oberfläche (Ätzen, Schmirgeln, Polieren)
Vorzeichen der Effekte und ihre örtliche Verteilung
III. Messungen:
1. Kurzschlußstrom und Leerlaufspannung
2. Einfluß einer Vorspannung
3. Frequenzabhängigkeit
4. Temperaturabhängigkeit
5. Spektrale Verteilung
6. Größe der wirksamen Stellen
7. Kontaktdruck
8. Versuche mit aufgebrachten Elektroden
IV. Zusammenfassung

II. Die Fragestellung und ihre Vorgeschichte

Im Jahre 1904 hat J. C. Bose[1]) in einer Patentschrift angegeben, daß ein Bleiglanzkontaktdetektor als Lichtdetektor zu verwenden sei. Es erübrigt sich, auf seine allgemeineren Ausführungen einzugehen; überdies bleibt unklar, ob er seinen Lichtdetektor mit oder ohne Hilfsspannung benutzt hat und ob wirklich ein lichtelektrischer, nicht nur thermoelektrischer Effekt vorgelegen hat. 1929 wird die Erscheinung von M. Grützmacher[2]) erneut beschrieben und diesmal die Trägheitslosigkeit und Intensitätsproportionalität des Lichteffektes betont. Zur gleichen Zeit teilt B. Lange[3]) mit, daß Bleiglanz („spaltbarer französischer Galène") bei Belichtung eines Spitzenkontakts Spannungen bis zu 20 mV liefert und lehnt eine thermoelektrische Deutung derselben ab. Er sieht die Ursache der Erscheinung im Durchgang lichtelektrisch ausgelöster Elektronen durch eine Sperrschicht hohen Kontaktwiderstandes in der Sperrichtung des Gleichrichters. In seinem Buch „Photoelemente"[4]) macht Lange dann 1936 weitere Angaben über den Bleiglanzlichtdetektor. Er gibt eine spektrale Verteilung zwischen 0,5 und 1,3 μ an und schließt aus der Abhängigkeit des Effekts von der Temperatur eines strahlenden schwarzen Körpers auf eine Grenzwellenlänge von 4,5 μ. Diesen lichtelektrischen Deutungen gegenüber steht die Auffassung von F. Waibel[5]), der alle derartigen Effekte an

1) J. Ch. Bose, USA.-Patent Nr. 755840 (1904).
2) M. Grützmacher, Telegr. u. Fernspr.technik **19**, 285, 1930. Schweizer Patent Nr. 147290 (1931).
3) B. Lange, Physik. Zeitschr. **31**, 964, 1930.
4) B. Lange, Die Photoelemente und ihre Anwendung. J. A. Barth, Leipzig 1936.
5) F. Waibel, Zeitschr. f. Phys. **78**, 423, 1932.

Detektoren für thermoelektrisch bedingt hält: „Ein eventuell unterlagerter lichtelektrischer Anteil muß um mehrere Größenordnungen kleiner sein als der beobachtete Thermoeffekt."

E. Rupp sprach anfänglich[1]) von einem „lichtelektrischen Effekt" an Bleiglanzspaltstücken, die mit einer im Vakuum aufgedampften Goldelektrode versehen waren; die Elektronen gingen bei Belichtung und Erwärmung vom *Au* zum *PbS*. Der Effekt soll träge sein. In weiteren Mitteilungen[2]) äußert er sich zurückhaltender. Immerhin glaubt er einen Kristallphotoeffekt wie am Cuprit in Bleiglanz annehmen zu müssen. Eine lichtelektrische Deutung lehnen dagegen entschieden ab E. Tiede und G. Brückmann[3]); sie untersuchten *PbS*-Schichten, die aus wäßriger Lösung abgeschieden waren, natürliche und künstliche Bleiglanzkristalle und benutzten sowohl Spitzenkontakte wie lichtdurchlässige Goldhaut als Elektrode. Bei Belichtung fanden sie elektromotorische Kräfte bis 30 mV, aber genau so bei entsprechender Erwärmung. Zwischen empfindlicher Detektoreinstellung und hoher Belichtungsspannung bestand keine Parallelität.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß sich die Ansichten, ob lichtelektrischer Effekt (Grützmacher, Lange) oder ob thermoelektrischer (Waibel, Tiede und Brückmann), die beobachteten Belichtungsspannungen an Bleiglanz hervorruft, unentschieden einander gegenüberstehen und das von beiden Seiten beigebrachte Beobachtungsmaterial auch keine Entscheidung gestattet.

Wir berichten im folgenden über unsere Versuche, die zeigen, daß alle eben genannten Forscher in gewisser Hinsicht im Rechte gewesen sind.

II. Voruntersuchungen

Zunächst prüften wir möglichst viel verschiedene Bleiglanzvorkommen auf ihre Eignung als Lichtdetektor. Die Stücke wurden in einen handelsüblichen Detektorhalter geklemmt, eine federnde Stahlnadel der Reihe nach auf verschiedene Punkte des Kristalls aufgesetzt und die Berührungsstelle intensiv belichtet. Bei Beobachtungen im Gleichlicht waren die Kontakte mit einem Saitengalvanometer kurzer Einstelldauer (0,1 sec) verbunden; wurden die Messungen mit Wechsellicht (etwa 500 Hz) ausgeführt, so waren sie an den Eingangsübertrager eines Niederfrequenzbandverstärkers angeschlossen.

Geprüft wurden folgende Vorkommen:

1. Einkristall von Weardale, frei auf Quarz gewachsen.
2. Einkristall von Niederfischbach (Rheinland); zeigte beim Zerschlagen schalenförmigen Aufbau.
3. Bleiglanz von Joplin (Miss., USA.) zusammen mit Zinkblende kristallisiert.
4. Galenit von Pribram (Böhmen); spiegelnde Spaltflächen und grüne Verwitterungsrinde.
5. Einkristall von Bellmunt (Spanien).
6. Kristallit von Hankau (China).
7. Auf derbem Bleiglanz gewachsene Einkristalle von Salchendorf (Westfalen).
8. Bleiglanzwürfel unbekannter Herkunft.
9. Feinkristallines Material aus Sardinien.
10. Feinkristallines geschmolzenes Bleisulfid (künstlich) von Merck, Darmstadt.

An 1, 2 und 4 wurde nie auch nur die kleinste Lichtwirkung beobachtet. Etwaige Lichtwirkungen an 5 und 8 waren so klein, daß sie nicht sicher von Wärmewirkungen unterschieden werden konnten. 3 zeigte an seltenen Stellen kleine, 6, 7 und 9 dagegen stellenweise sehr starke Lichtwirkungen; jedoch war an 6 und 7 gelegentlich tagelang kein Punkt zu finden, der eine meßbare Spannung lieferte.

Wichtig ist die Unterscheidung von lichtelektrischen und thermoelektrischen Wirkungen; erstere sind praktisch trägheitslos, letztere nicht. Wir unterscheiden sie entweder im Gleichlicht bei Verwendung des Saitengalvanometers kurzer Einstelldauer oder in allen zweifelhaften Fällen im Wechsellicht durch Beobachtung der Frequenzabhängigkeit. Nur durch eine Aufnahme des gesamten Frequenzbandes lassen sich Wärme- und Lichtwirkungen einwandfrei trennen, da die Thermospannung von einem durch die Größe der Trägheit bestimmten Punkt ab mit zunehmender Frequenz abnimmt. Die Messung bei hohen Frequenzen bietet allein noch keine Sicherheit, da auch bei 10^4 Hz noch Thermospannungen gefunden werden; selbst bei einem Zeiß-Thermoelement mit einer Zeitkonstanten von einigen Sekunden konnte der „Frequenzgang" bis 750 Hz aufgenommen werden (Fig. 1). Auf diese Weise ließ sich beispielsweise zeigen, daß auch die an dem künstlichen *PbS* von Merck anfänglich beobachteten Spannungen nicht als Licht-, sondern nur als Wärmewirkung zu deuten waren.

Die Suche an den verschiedenen Mineralien lehrte zunächst einmal, daß es sich nur um einzelne lichtempfindliche Stellen handelt und daß diese von Vorkommen zu Vorkommen außerordentlich verschieden häufig sind. Spektralanalytisch zeigten die Proben keine

1) E. Rupp, Zeitschr. f. Phys. **76**, 597, 1932.
2) E. Rupp, Zeitschr. f. Phys. **79**, 562, 1932; **80**, 483, 1933.
3) E. Tiede und G. Brückmann, Zeitschr. f. Phys. **80**, 302, 1933.

Unterschiede, die auf die Mitwirkung von Fremdstoffen hingedeutet hätten; doch wären Spuren der Beobachtung entgangen.

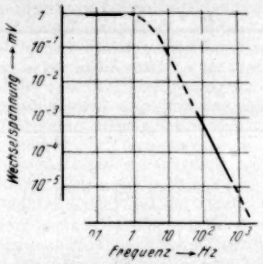

Fig. 1. „Frequenzgang" eines Strahlungsthermoelements von Zeiß.
Eine Lötstelle, Auffangfläche 6 mm².

Weiterhin wurde untersucht, ob die Lichtwirkung an Oberflächenschichten gebunden ist. Frische Bruchflächen zeigten mehr empfindliche Punkte als alte Oberflächen, geschmirgelte oder polierte Flächen weniger als rauhe Bruchflächen. Die Empfindlichkeit der einzelnen Punkte schien an sardinischem Bleiglanz bei jeder Art von Schmirgelung und Politur rund sechsmal niedriger als an frischen Bruchflächen. Spiegelnde Spaltflächen waren im allgemeinen unempfindlich.

Wurden die Kristallflächen mit starken, sogar kochenden Säuren oder Laugen oder geschmolzenem Alkali geätzt, so waren lichtempfindliche Punkte nachher in gleicher Häufigkeit zu finden. Da bei diesem Vorgehen oberflächliche Schichten entfernt werden, müssen die empfindlichen Stellen gleichmäßig durch das Innere verteilt sein oder sich immer wieder neu bilden.

Unter dem Mikroskop konnten wir lichtempfindliche Stellen von unempfindlichen nicht unterscheiden.

Bei Verwendung von Wechsellicht und Verstärker können die Lichtwirkungen in ihrer Größe festgestellt und von Thermospannungen unterschieden werden, das Vorzeichen beider bleibt unbestimmt. Bei Messungen im Gleichlicht mit dem Saitengalvanometer zeigte sich nun die Merkwürdigkeit, daß bei Belichtung eines Spitzenkontakts auf Bleiglanz mindestens drei Vorzeichenverbindungen auftreten können. Wird der Elektronenaustritt aus dem *PbS* mit +, der aus der Nadel mit — bezeichnet, so beobachteten wir folgende Zusammenstellungen. Elektronenaustritt aus der Spitze ist allerdings nur am Hankauer Vorkommen beobachtet worden. In der Regel treten die Elektronen aus dem Kristall in die Spitze.

Thermospannung	Belichtungsspannung
o	+
+	+
+	o
o	o
—	o
—	+
—	—

Wärme- und Lichtwirkungen sind folglich voneinander unabhängig. Die Registrierkurven des Saitengalvanometers zeigten dementsprechend folgende vier Typen (Fig. 2), wobei das Verhältnis zwischen trägheitsloser lichtelektrischer und träger thermoelektrischer Wirkung alle Werte annehmen konnte.

Nur in einem Fall wurde bei Belichtung eines Bleiglanzkontaktes gefunden, daß die Überlagerung der beiden Wirkungen nicht durch eine dieser vier Kurven dargestellt werden konnte. Diese Messung ist in Fig. 3 wiedergegeben. Offenbar konnten hier Licht- und Thermospannung zusammen eine bestimmte, durch die Kontaktanordnung vorgegebene Grenzspannung nicht überschreiten.

Fig. 2. Zeitlicher Verlauf der Spannung an belichteten *PbS*-Kontakten.
Verschiedene beobachtete Typen:
a = Lichtwirkung,
b = Wärmewirkung,
c = Licht- u. Wärmewirkung gleichsinnig,
d = Licht- u. Wärmewirkung gegensinnig.

Die Vorzeichen der Lichtspannung zeigten übrigens eine ausgesprochene örtliche Verteilung. In Fig. 4 und der dazu gehörigen Tabelle

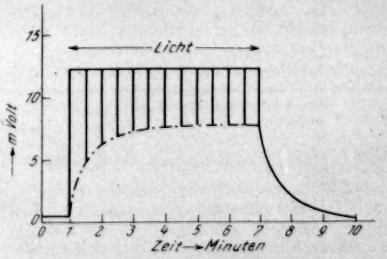

Fig. 3. Einzelbeobachtung einer merkwürdigen Beziehung zwischen Licht- und Wärmewirkung an einem Bleiglanzkontakt von Salchendorf.
Konstante Belichtung mit kurzen Unterbrechungen zur Trennung der trägheitslosen Licht- von der trägen Wärmewirkung.

sind z. B. die Ergebnisse der Messungen an einem Hankauer Kristallsplitter wiedergegeben; hierbei wurde stets der ganze Kristall gleichmäßig belichtet und nur der Aufsetzpunkt der Feder verändert.

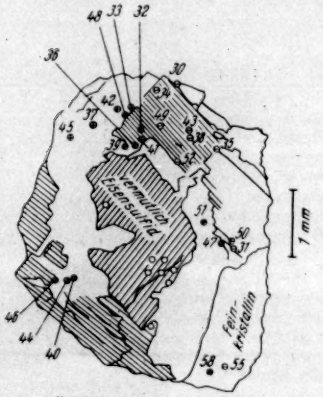

Fig. 4. Örtliche Verteilung der Lichtwirkung an einem Bleiglanzkristall von Hankau. ⊕ Kristall wird positiv, ⊖ Kristall wird negativ, ○ keine Wirkung zu beobachten.

PbS-Proben fanden wir keinen Zusammenhang zwischen Eignung als Licht- und als Wellendetektor. Letztere Eigenschaft ist unvergleichlich viel häufiger und Lichtdetektoren sind keineswegs besonders gute Wellendetektoren. Entsprechendes war schon früher an MoS_2 und Ag_2S bekannt; merkwürdigerweise und ganz ungerechtfertigt sind trotzdem Belichtungsspannung und unipolare Leitung mehrfach als zusammengehörig angesehen worden.

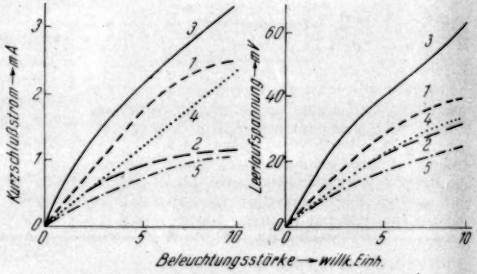

Fig. 5. Intensitätsabhängigkeit von Kurzschlußstrom und Leerlaufspannung an fünf verschiedenen Bleiglanzkontakten. (Beleuchtungsstärke 10 entspricht rund 3,5 Watt Gesamteinstrahlung einer Bogenlampe.)

Bekanntlich eignen sich Bleiglanzspitzenkontakte als Wellendetektor (Gleichrichter). In ausgedehnten Prüfungen an den verschiedenen

Meßpunkt-Nr.	Licht-	Wärme-
	Wirkung in Mikroampere bei 15-Ohm-Instrumentwiderstand	
30	− 19	− 11
31	− 10	− 20
32	+ 8	− 33
33	+ 3	− 13
34	− 13	− 3
35	− 19	− 11
36	+ 2	− 18
37	+ 3	− 19
38	− 22	− 8
39	+ 3	− 7
40	+ 8	− 12
41	+ 4	− 11
42	+ 3	− 11
43	− 7	− 12
44	+ 8	− 9
45	+ 2	− 4
46	+ 33	− 37
47	+ 2	− 30
48	+ 8	− 21
49	− 7	− 18
50	− 2	− 20
51	+ 2	− 18
52	− 7	− 18
55	− 2	− 2
58	+ 33	− 46

III. Messungen

1. Kurzschlußstrom und Leerlaufspannung

Der Kurzschlußstrom i_0 wurde mit einem Saitengalvanometer gemessen, dem ein Widerstand von 0,1 Ohm parallel geschaltet war. Erhöhung des Nebenwiderstandes auf 1 Ohm

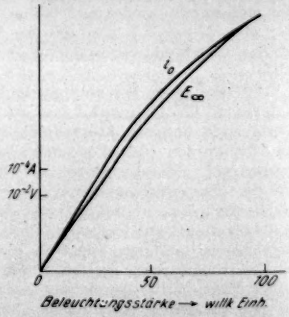

Fig. 6. Intensitätsabhängigkeit von Kurzschlußstrom und Leerlaufspannung bei kleineren Intensitäten. (Glühlampe abgebildet, Beleuchtungsstärke 100 entspricht rund 0,1 Watt.)

änderte den Strom nicht mehr. Die Leerlaufspannung e_∞ wurde mit einem Gleichstromgegentaktverstärker ermittelt. Fig. 5 zeigt die Messungen an fünf Spitzenkontakten. Bemerkenswert ist, daß nicht nur i_0, sondern auch e_∞ in beträchtlichen Grenzen der Lichtintensität proportional ist. Die beiden Kurven unterscheiden sich viel weniger als bei Sperrschichtphotozellen. Fig. 6, die Messungen bei kleineren Beleuchtungsstärken wiedergibt, zeigt, daß für nicht zu hohe Lichtintensitäten für i_0 und e_∞ genaue Proportionalität zur Lichtintensität besteht. Die Abweichungen bei hohen Intensitäten werden wahrscheinlich auf die Erwärmung der Kontaktstelle zurückzuführen sein. In der Tat rechnen ja auch die theoretischen Überlegungen, die bei den Sperrschichtphotozellen das Abweichen der Leerlaufspannung von der Linearität erklären, mit einem linearen Kettenleiter[1]), was hier sicher nicht in Frage kommt.

2. Einfluß einer Vorspannung

Um eine Spannungsabhängigkeit der Lichtwirkung festzustellen, wurde die Stromspannungskennlinie eines Spitzenkontaktes mit und ohne Belichtung gemessen (Fig. 7). Die Dunkelkennlinie zeigt, daß der Kontakt keine besonders gute Gleichrichtung aufweist. Der Strom wurde

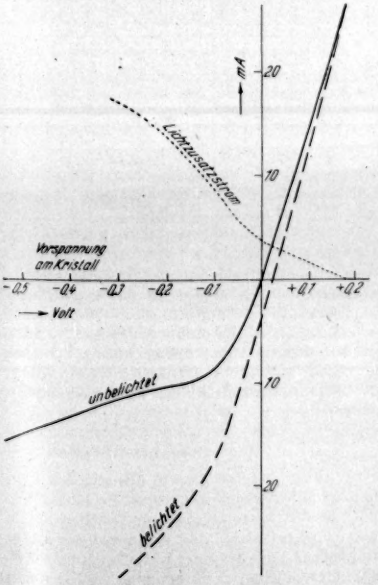

Fig. 7. Kennlinie eines Bleiglanzkontaktes mit und ohne Licht. (Nernststift abgebildet.)

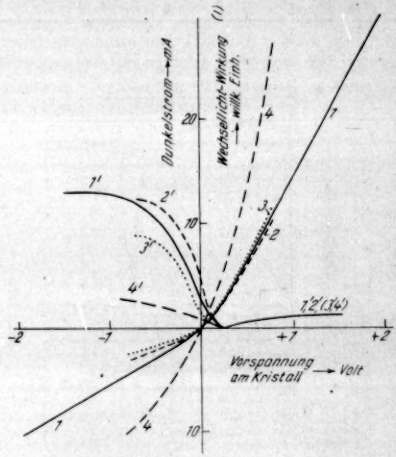

Fig. 8. Dunkelkennlinien (Nummern ohne Strich) und Lichtwirkungen (Nummern mit Strich) vier verschiedener Bleiglanzkontakte in Abhängigkeit von der Vorspannung.

bei einem Instrumentwiderstand von 0,3 Ohm gemessen. Zur Ergänzung wurden entsprechende Messungen auch im Wechsellicht ausgeführt. Fig. 8 zeigt die Dunkelkennlinien und die am Verstärker gemessenen Lichtwirkungen. Der Kurvengang ist in allen Fällen gleich und entspricht dem im Gleichlicht gemessenen.

Obgleich der Verstärker das Vorzeichen des Lichteffektes nicht berücksichtigt, läßt doch schon Fig. 8 vermuten, daß die Wechselspannung eine Phasenverschiebung um 180° erfährt, der Strom also sein Vorzeichen ändert, wenn am Kristall eine genügend große positive Vorspannung anliegt; dies wurde durch ergänzende Messungen bestätigt.

3. Frequenzabhängigkeit

Auf die weitgehende Frequenzunabhängigkeit der Bleiglanzlichteffekte hat schon Grützmacher[1]) hingewiesen. Wir untersuchten mit Wechsellicht und Verstärker im Bereich zwischen 20 und 10000 Hz. Soweit keine Thermospannung überlagert war, konnten wir in diesem Bereich keine Abhängigkeit von der Frequenz feststellen. Die Messungen wurden so durchgeführt, daß der

1) W. Schottky, Physik. Zeitschr. **31**, 913, 1930.

1) A. a. O.

Bleiglanzkontakt mit einer Vakuumphotozelle verglichen wurde, der ein dem *PbS*-Kontakt gleicher Widerstand parallel geschaltet war, so daß die Frequenzabhängigkeit des Meßverstärkers ohne Einfluß blieb. Ergänzend kann bemerkt werden, daß die Frequenzunabhängigkeit des *PbS* auch beim Arbeiten mit Vorspannung

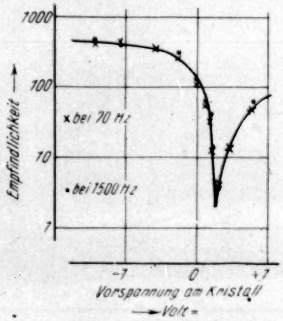

Fig. 9. Abhängigkeit der Lichtwirkung von der Vorspannung (Ordinate logarithmisch!) bei zwei Lichtfrequenzen. (Sardinischer Bleiglanz.)

erhalten bleibt. In Fig. 9 ist die Vorspannungsabhängigkeit bei zwei verschiedenen Frequenzen aufgetragen. Die Figur entspricht, abgesehen von der etwas veränderten Darstellung, durchaus der Fig. 7.

4. Temperaturabhängigkeit

Der in eine Glasglocke eingeschmolzene *PbS*-Kontakt befand sich in einem Thermostaten, dessen Temperatur zwischen — 10 und + 40° C

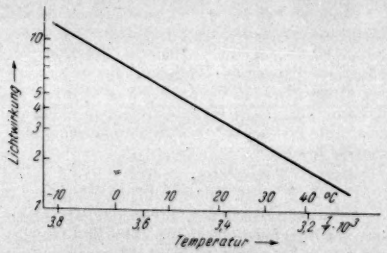

Fig. 10. Abhängigkeit der Lichtwirkung von der Temperatur im Bereich strenger Umkehrbarkeit. (Sardinischer Bleiglanz.)

verändert werden konnte. Fig. 10 zeigt, daß die Temperaturabhängigkeit ziemlich groß ist und exponentiell verläuft. In dem angegebenen Temperaturbereich waren die Messungen gut umkehrbar. Bei Unterschreitung von — 10° traten bleibende Veränderungen ein, die schließlich den Kontakt unbrauchbar machten. Vermutlich hatte sich hierbei der Kontakt infolge der verschiedenen Wärmeausdehnung der einzelnen Teile verschoben. Zur Deutung der umkehrbaren Temperaturabhängigkeit kann man an drei Änderungen denken: der lichtelektrischen Absorption, des Elektronendiffusionsweges und der Sperrschicht. Der erste Punkt scheidet wohl aus, da die Beobachtungen im weißen Licht und nicht im Bereich der Absorptionskante erfolgten.

5. Spektrale Verteilung

Die spektrale Verteilung (Fig. 11) entspricht insofern der für lichtelektrische Leitung bekannten, als der Effekt an der optischen Absorptionskante einen Höchstwert erreicht (bezogen auf auffallende Lichtintensität) und dann mit abnehmender Absorption fällt. Für die Messungen stand ein Quarzdoppelmonochromator für das

Fig. 11. Spektrale Verteilung der Lichtwirkung an zwei Kontakten sardinischen Bleiglanzes, bezogen auf gleiche auffallende Lichtintensität.

sichtbare und ultraviolette Gebiet und ein Steinsalzdoppelmonochromator für das Ultrarot zur Verfügung; die Meßergebnisse sind daher durch Streulicht nicht beeinflußt. Auffallend ist, daß auch in den Gebieten starker Absorption noch so erhebliche Wirkung erhalten ist; hierin gleicht der *PbS*-Spitzenkontakt der Selensperrschichtzelle.

6. Größe der wirksamen Stellen

Wichtig ist es zu wissen, aus welchen Entfernungen lichtelektrisch ausgelöste Elektronen noch an die Spitze gelangen und so zum Strom überhaupt beitragen. Zur Prüfung dieser Frage wurde der Glühfaden einer Einfadenlampe durch ein gutes Objektiv (Zeiß Sonnar 1:2, F = 5 cm) zehnfach verkleinert abgebildet und das Bild mit Hilfe einer Mikrometerschraube über den Kontakt weg bewegt. In den Strahlengang war

4 cm verdünnte Kupferoxydammoniaklösung eingeschaltet, die alles nicht sichtbare Licht, für das das Objektiv nicht mehr einwandfrei korrigiert gewesen wäre, beseitigte, so daß wirksame und sichtbare Bildbreite zusammenfielen; diese wurde mikroskopisch zu 0,02 mm gemessen. Die

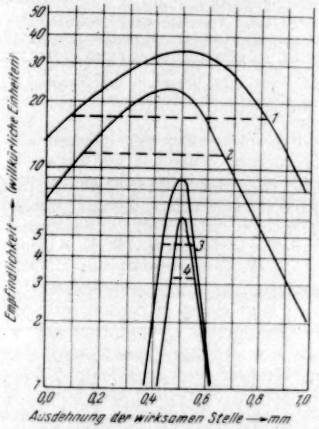

Fig. 12. Ausdehnung der zur Lichtwirkung beitragenden Bezirke an vier verschiedenen Nadelkontakten. (Sardinischer Bleiglanz.)

zur Lichtwirkung des Kontakts beitragenden Bezirke waren einige Zehntel Millimeter ausgedehnt. Fig. 12 zeigt die Meßergebnisse für verschiedene Kontakte; man sieht, daß die „Quellbezirke" sehr verschieden groß sind. Die Größe der wirksamen Stelle steigt etwa im Verhältnis mit der allgemeinen Lichtempfindlichkeit des untersuchten Kontaktes. Bei den empfindlichsten Kontakten kann eine Kreisfläche von etwa 1 mm Durchmesser, bei den schlechteren von nur 0,1 mm Durchmesser als Quellbezirk der am Kontakt wirksam werdenden Elektronen angenommen werden. Die Größe der wirksamen Fläche eines Kontaktes hängt, wie ergänzende Messungen zeigten, nicht von der Wellenlänge des eingestrahlten Lichtes ab.

7. Kontaktdruck

Aus einem alten Starkstromrelais wurde eine Vorrichtung gebaut, die es gestattete, eine Stahlnadel auf eine Bleiglanzfläche magnetisch mit einer stetig veränderlichen Kraft von 10–1000 g Gewicht aufzudrücken. Fig. 13 zeigt, daß die bei Erstbelastung eintretenden irreversiblen Änderungen, wenigstens bei Belastungen über 100 g Gewicht, erhebliche Empfindlichkeitsabnahme bewirken. Die dabei auftretenden Widerstandsänderungen liegen dabei nur im Bereich 1:3. Es war nicht zu entscheiden, ob die Änderung der Empfindlichkeit auf Verletzung einer Sperrschicht, Störung des Kristallgitters oder kleinster Verlagerung der Kontaktstelle beruht. Bei den benutzten Stahlnadeln (Grammophonnadeln) war die günstigste Belastung etwa 50 g Gewicht.

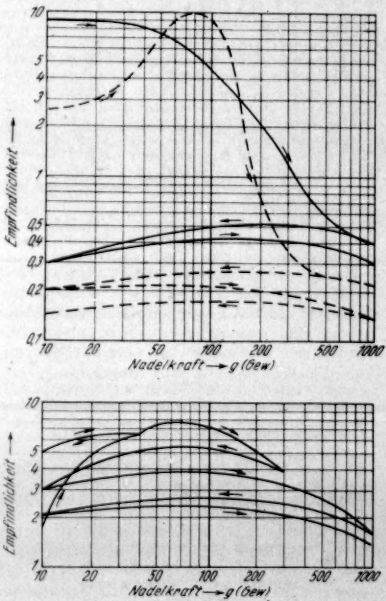

Fig. 13. Einfluß des Kontaktdruckes auf die Lichtwirkung an drei verschiedenen Kontakten. (Sardinischer Bleiglanz.)

8. Versuche mit aufgebrachten Elektroden

Um die Nachteile eines Spitzenkontaktes zu vermeiden, versuchten wir Elektroden auf dem *PbS* fest anzubringen: auf eine geschmirgelte Fläche sardinischen Bleiglanzes wurde im Hochvakuum ein undurchsichtiger Goldpunkt von etwa 2 mm Durchmesser aufgedampft und dieser mit einer weichen Abnahmeelektrode berührt. Außer einer Thermospannung wurde in dieser Anordnung am Goldrand nur eine Lichtwirkung von rund einigen Prozent des am gleichen Stück an Kontaktnadeln beobachteten erhalten (Fig. 14).

War der Goldfleck lichtdurchlässig, so war außer am Rand auch in der Mitte eine große Wirkung festzustellen; ihre Zeitabhängigkeit entspricht

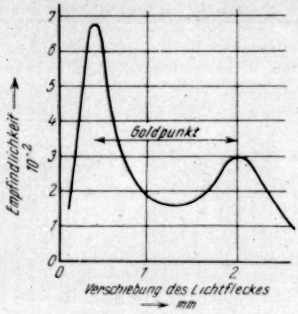

Fig. 14. Örtliche Verteilung der Belichtungsspannung (Licht- und Wärmewirkung) an einem undurchsichtig aufgedampften Goldpunkt von 1,5 mm ⌀; Lichtfleck 0,5 mm ⌀. Die Frequenzabhängigkeit beweist das Überwiegen einer Thermospannung.

durchaus der bei Tiede und Rupp beschriebenen[1]) und ist in Fig. 15 wiedergegeben. Es handelt sich einwandfrei um eine Thermospan-

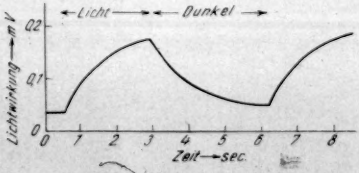

Fig. 15. Zeitlicher Verlauf der Belichtungsspannung an einem Bleiglanzkristall mit halbdurchlässig aufgedampfter Goldelektrode.

1) A. a. O.

nung. Möglicherweise könnten Versuche mit Kathodenzerstäubung erfolgreicher sein; wenn allerdings für die Lichtwirkung ein bestimmter Druck wesentlich sein sollte, so wäre auf dem eben genannten Weg keine große Aussicht, die Nachteile des Nadelkontakts zu umgehen. Überschlagsmäßig ergibt sich aus den Messungen der Fig. 13 unter der Annahme einer Nadelkraft von 100 g Gewicht und einer Berührungsfläche von etwa 10^{-3} mm² ein Kontaktdruck von 10^4 kg/cm², also ein Wert, der bei einer Flächenelektrode rein aus Gründen der Festigkeit nicht zu verwirklichen ist.

Bei Flüssigkeitselektroden dagegen könnte durch elektrische Aufladung der Grenzschicht ein Druck in dieser Höhe jederzeit entstehen. Über derartige Versuche berichteten wir bereits a. a. O.[1]).

IV. Zusammenfassung

Die Messungen, über die hier berichtet wurde, bestätigen das Auftreten einer trägheitslosen Belichtungsspannung an verschiedenen *PbS*-Spitzenkontakten. Neben dieser lichtelektrischen Wirkung treten oft auch träge Thermospannungen auf. Die im Schrifttum bestehenden Meinungsverschiedenheiten über die Art der bei Belichtung des Detektorkontaktes entstehenden Spannung lassen sich somit zwanglos dadurch erklären, daß die verschiedenen Verfasser verschiedene Erscheinungen beobachtet haben.

Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die beiden Monochromatoren nebst Zubehör.

1) F. Fischer, B. Gudden und M. Treu, Zeitschr. f. Phys. **107**, 1937.

Erlangen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 21. September 1937)

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

Agte-Becker, Hartmetallwerkzeuge. 324 S. Mit 144 Abb. 2. Aufl. Berlin 1937. Verlag Chemie. In Ganzleinen RM 18.—.

Unter Hartmetallen versteht man im allgemeinen gesinterte Legierungen aus einem harten Karbid oder Karbidgemisch und einem leichter schmelzenden Hilfsmetall. So bilden Wolfram- und Titankarbid die Basis der bekannten deutschen Hartmetalle Widia, Titanit und Böhlerit, die sich durch eine fast diamantähnliche Härte auszeichnen. Infolgedessen eignen sie sich hervorragend zur Bearbeitung von Stoffen, denen gegenüber normaler Stahl völlig versagt, so lassen sich mit ihnen Glas, Marmor, Porzellan usw. wie Metalle drehen, bohren oder fräsen. Bei der Bearbeitung von Metallen lassen sich andererseits bisher unerhörte Schnittgeschwindigkeiten erzielen, die die Bearbeitungszeiten auf einen Bruchteil herabsetzen und durch die sich Oberflächen erzielen lassen, die geschliffenen an Glätte nicht nachstehen.

Das vorliegende, bereits in 2. Auflage erscheinende Buch berichtet über die besonderen Eigenschaften der Hartmetalle, die bei Herstellung und Verwendung von Hartmetallwerkzeugen zu beachtenden konstruktiven und wirtschaftlichen Grundsätze und enthält eine eingehende Darstellung der vielen verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten dieses Werkstoffes. Indem somit die Verwendung von Hartmetallwerkzeugen auch für die Konstruktion und Herstellung physikalischer Apparate neue Möglichkeiten eröffnet, bietet das Buch dem Physiker mannigfache Anregung. So kann eine Lektüre dieses gut geschriebenen und ausgestatteten Werkes nur empfohlen werden.

H. Spengler.

Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie. Herausgegeben von der Deutschen Chemischen Gesellschaft, Redakteur E. Pietsch. Gr.-8°. Berlin 1937. Verlag Chemie G.m.b.H.

1. Systemnummer 22: Kalium. Lieferung 2: Verbindungen mit Stickstoff, Fluor und Chlor. XI und 267 S. Mit 11 Fig. 1937. RM 42.— geh.

Der Band behandelt eine Anzahl meist wohlbekannter Kaliumsalze, z. B. Nitrid und Nitrat, Fluorid, Chlorid, Chlorat. Die hier meist gründlich untersuchten physikalischen und physikalisch-chemischen Eigenschaften der Salze und ihrer Lösungen sind wieder in anerkennenswerter Durcharbeitung angegeben. Besonders gilt dies von den Verfärbungserscheinungen, den Festigkeitseigenschaften und Kristallisationsvorgängen. Auch die technischen Herstellungsprozesse sind unter Einbeziehung der Patentliteratur übersichtlich dargestellt. Die Behandlung der Salzlösungen als starker Elektrolyte (osmotische und Leitfähigkeitsanomalien u. dgl.) ist vielleicht etwas ungleichmäßig; am günstigsten scheint dem Referenten die beim *KCl* gewählte Anordnung, wo besonders reichliches Material zu straffster Organisation zwang. (Es sei die Frage aufgeworfen, ob es sinnvoll ist, die nach fragwürdigen Gesetzmäßigkeiten extrapolierten kritischen Daten von Salzen, wie KNO_3, ins Handbuch aufzunehmen. Die Molekularrefraktion von festem KNO_3 ist ohne Angabe der Kristallrichtung angeführt.)

2. Systemnummer 35: Aluminium. Teil A: Das Element. Lieferung 5: Legierungen mit Zink bis Uran. XVI und 203 S. Mit 107 Fig. 1937. RM 33.— geh.

Hier wird das schon bei seinem Beginn besonders von uns hervorgehobene wertvolle Werk über die Aluminiumlegierungen fortgesetzt, und zwar enthält die Lieferung die bis quaternären Legierungen mit Metallen der zweiten bis sechsten Gruppe des Periodischen Systems. Etwa 100 Seiten nehmen allein die wichtigen zinkhaltigen Legierungen ein. Man findet neben den wissenschaftlichen Daten auch alle technisch wichtigen, wie Gießeigenschaften, Aushärtung u. dgl. Wieder sind die reichen und guten Figuren zu loben. Die Entlastung von der Patentliteratur durch ein gesondertes Tabellenwerk macht sich hier sehr angenehm fühlbar.

3. Magnesiumlegierungen, Patentsammlung, von A. Grützner, G. Apel und C. Götze, zugleich Anhang zu Systemnummer 27: Magnesium, Teil A: Das Element. VI und 192 Seiten. 1937. RM 20.— geh.

Im Gegensatz zu der soeben besprochenen Aluminiumlieferung, die die wissenschaftliche Literatur textlich verarbeitet, handelt es sich hier um die tabellarische Zusammenstellung der Patentliteratur in einem besonderen Nebenwerk, wie solche ja auch für die Aluminiumlegierungen sowie für die Eisen- und Stahllegierungen herausgekommen sind. Mit dem zugehörigen Textband ist die Tabelle durch in ihm angebrachte Verweisungen verknüpft. In ihr findet besonders der technische Interessent rasch nach einem alphabetischen Schlüssel Eigenschaften und Patentzitat aller in Betracht kommenden Legierungssysteme mit Magnesium, ohne daß der wissenschaftliche Textband desselben Gebietes durch diese Angaben belastet würde. Diese Lösung des Problems der Patentliteratur hat sich nach Angabe der Redaktion und der Verfasser jetzt bereits in der Erfahrung bewährt.

G. M. Schwab.

J. P. den Hartog, Mechanische Schwingungen. Deutsche Bearbeitung von G. Mesmer. Gr.-8°. XII u. 343 S. Mit 274 Abb. Berlin 1936. Julius Springer. RM 28.—, geb. RM 29.60.

Das vorliegende, nach der amerikanischen Originalausgabe übertragene Werk gibt eine systematische Darstellung der mechanischen Schwingungen in Hinblick auf die technischen Anwendungen, mit zahlreichen Anwendungsbeispielen aus allen möglichen Gebieten und einer größeren Zahl von Aufgaben, zu denen die Lösungen angegeben werden. Die Vielseitigkeit der behandelten Anwendungen zeigen folgende Beispiele: Elektrische Haarschneidemaschine mit dynamischem Dämpfer, Schiffskreisel, Kraftwagenstoßdämpfer, Schiffsschraubenschwingungen, Gehäuseschwingungen in elektrischen Maschinen, Flattern von Flugzeugflügeln. Das Bestreben des Verfassers ist, eine möglichst anschauliche Darstellung zu geben und mit möglichst geringen mathematischen Mitteln auszukommen, dabei jedoch den Studierenden oder den Mann der Praxis soweit anzuleiten, daß er selbständig neue, ähnliche Probleme behandeln kann. Wenn hierzu vielleicht auch der eine oder andere Wunsch offen bleibt (z. B. wären Hinweise auf Spezialliteratur erwünscht), so kann man doch die Aufgabe als im wesentlichen sehr gut gelöst bezeichnen. Den Physiker befriedigt vor allem das Bestreben, neben dem mathematisch Formalen stets das physikalisch Wesentliche hervorzuheben. Für Vorlesungen und Übungen sind die vielfältigen Anwendungen eine reiche Fundgrube. Sehr vermißt wird ein Sachregister.

Überblick über Aufbau und Inhalt geben noch folgende Angaben über die einzelnen Kapitel: Kinematik der Schwingungen. Systeme mit einem Freiheitsgrad. Zwei Freiheitsgrade. Mehrere Freiheitsgrade. Vielzylindermaschinen. Umlaufende Maschinenteile. Selbsterregte Schwingungen. Systeme mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten und nichtlineare Systeme.

L. Schiller.

Jahrbuch 1935 der Vereinigung für Luftfahrtforschung. Gr.-8°. 341 S. Mit 225 Abb. München und Berlin. R. Oldenbourg. RM 6.—

Jahrbuch 1936 der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung. Gr.-8°. 647 S. München und Berlin. R. Oldenbourg. RM 20.—.

Die 1933 ins Leben gerufene Vereinigung für Luftfahrtforschung ist inzwischen in der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung aufgegangen. Die Aufgabe beider Organisationen war bzw. ist die Förderung des wissenschaftlichen Erfahrungsaustausches und der gegenseitigen Anregung von Forschung und Praxis. Die Zusammenfassungen der Vorträge aus den wissenschaftlichen Aussprachen und Tagungen ihrer Fachgruppen geben daher einen umfassenden Überblick über den jeweiligen Stand auf allen Teilgebieten der Luftfahrtforschung. Im Jahrbuch 1935 der VLF. liegt eine erste Sammlung solcher Vorträge vor, ergänzt durch eine Reihe wertvoller Originalarbeiten. Die Lilienthal-Gesellschaft hat mit dem Jahrbuch 1936 die Herausgabe der Vorträge fortgesetzt. Es ist unmöglich, an dieser Stelle die einzelnen Beiträge anzuführen. Im Jahrbuch 1935 werden in 22 Vorträgen und 5 Abhandlungen, im Jahrbuch 1936 in 42 Vorträgen und 8 Originalabhandlungen alle Gebiete der Luftfahrt behandelt. Außerdem werden eine Übersicht über die Organisation der VLF. bzw. L.-G. und Berichte über die Tätigkeit der einzelnen Ausschüsse und Fachgruppen gegeben. Die Herausgabe der Bücher stellt zweifellos ein großes Verdienst um die Wissenschaft dar, ihr Inhalt ist für den auf dem Gebiete der Luftfahrtforschung tätigen Physiker oder Ingenieur von unschätzbarem Wert. A. Naumann.

G. Schmaltz, Technische Oberflächenkunde, Feingestalt und Eigenschaften von Grenzflächen technischer Körper insbesondere der Maschinenteile. Gr.-8°. XV u. 286 S. Mit 336 Abb. im Text und 160 Abb. auf 32 Tafeln. Berlin 1936. Julius Springer. Geb. RM 45.60, brosch. RM 43.50.

Nicht immer erweckt eine Neuschöpfung einen so ausgezeichneten Eindruck, wie man ihn beim ersten Einblick in dieses Werk gewinnt: Sympathisch in der Auffassung, eindringlich und klar in der Darstellung, umfassend in der Zusammenstellung, reichhaltig und nachhaltig hinsichtlich der aufgeworfenen Probleme.

Überzeugt von der Dringlichkeit dieses neu umrissenen Gebietes, fragt sich der Leser zuerst, warum ihm eine solche Schöpfung nicht schon früher beschert wurde, begreift dann aber bald, daß ein so umfassendes Wissen aus dem Großgebiet der Physik und aus einer vielzweigigen Technik nicht jedermanns Sache ist. Aus dem Inhalt ersieht man, von welch' weitreichendem Einfluß auf technologische und physikalische Vorgänge die Beschaffenheit der Oberflächen und Grenzflächen ist, und man gewinnt beinahe den Eindruck, daß hier ein Grenzgebiet sich zum Primärgebiet auswächst.

Überblickt man die in dem Buche behandelten Fragen, die im Zusammenhang mit der Oberflächenbeschaffenheit stehen, wie Festigkeit, Abnutzung, Reibung, Strömung, Wärmeübertragung, Wärmeleitung, Strahlung, Kondensation, Verdampfung, so erkennt man, daß fast alle Fragen physikalischer Natur sind. Auch die Verfahren zur Oberflächenprüfung stützen sich vorzugsweise auf die Physik. So hat das Buch, welches ohne Frage zunächst für den Ingenieur bestimmt ist, in seinem Ausbau eine Bedeutung angenommen, die im zumindest gleichen Ausmaß sich auf den Kreis der Physiker erstreckt. Der Ingenieur, welcher bisher nur an eine makrogeometrische Betrachtung der Oberfläche gewöhnt war, wird hier an mikrogeometrische Verhältnisse herangeführt, die ihn einer physikalischen Betrachtungsweise näherbringen. Von ausschließlich technischer Bedeutung ist die in einem besonderen Kapitel behandelte Technologie bearbeiteter Metallflächen.

Daß eine solche erstmalige Zusammenstellung eine Fülle weiter Ausblicke zur Folge haben wird, ist anzunehmen. Auch die Experimentierarbeit des Physikers wird nicht unberührt bleiben von den Einflüssen der mikrogeometrischen Oberflächenbeschaffenheit der Instrumente.

Eine nach dem Dezimalsystem vorgenommene Gliederung erleichtert den Überblick. Hinter jedem Abschnitt der Inhaltsübersicht ist durch Zeichen vermerkt, für welchen Leserkreis der betreffende Abschnitt von besonderem Interesse ist. Es ergeben sich hieraus die folgenden Summierungen: Fortgeschrittener Student des Maschinenbaufaches (21), Konstrukteur (31), Betriebsmann (42), Forscher (76), woraus zu ersehen ist, daß der Forscher mit diesem Werk auf seine Kosten kommt.

W. Kuntze.

NACHRICHTEN

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Hannover Dr. Alwin Hinzpeter für Physik, an der Universität Berlin Dr. W. Krauss für Chemie, an der Universität Kiel Dr. Hans Bode für anorganische Chemie, an der Universität Halle Dr. Herbert Stamm für anorganische Chemie.

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Carl Siegel in gleicher Eigenschaft an die Universität Göttingen, der nichtbeamtete a. o. Professor an der Universität Freiburg i. Br. Dr. Wilhelm Kast zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Halle, der wissenschaftliche Assistent Dr. Wilhelm Dames zum Regierungsrat in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin, der Dozent an der Universität Heidelberg Dr. Ludwig Wesch zum a. o. Professor ebenda, der a. o. Professor an der Universität Greifswald Dr. Wilhelm Maier zum ord. Professor der Mathematik daselbst, der a. o. Professor an der Universität Münster Dr. Fritz Micheel zum beamteten a. o. Professor für organische Chemie ebenda.

Lehrauftrag: Der Dozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Günther Briegleb für Physikalische Chemie an der Universität Würzburg, Dr. W. Röhrs für Chemie der Kunststoffe an der Technischen Hochschule Berlin.

Gestorben: Der emeritierte a. o. Professor der Experimentalphysik an der Universität Berlin Dr. Eugen Blasius, der a. o. Professor der Mathematik an der Universität Graz Dr. Theodor Radaković.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — D. A. 1330. IV. Vj. 1937. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany